# 序

在1948年举行的波兰数学家代表大会上，教育部长斯克塞施维奇号召大会参加者更多地为中等学校写稿，使学生的数学知识有更好的提高。正如《数学》杂志的读者所知道，我响应了号召，承担了义务，并且支持了这个意见。我发表在这份杂志上的习题，就是完成1948年所承担的义务的一个部分。但是我还向自己提出另外的目的：我想使阅读《数学》杂志的教师，从而也使他们的学生注意数学跟现实的相互联系。因此，我努力编写这样的习题：它们以最自然的方式产生于几何现象或者现实的环境。编写这样的习题是不很容易的，因而这本书的篇幅并不大。虽然如此，读者在这里还可以看到一百个习题的全部解答，以及这些习题在必需的地方实际应用的概况。

这本初等的习题集，应当把读者引导到这个解释现象的普遍方法（希腊人曾经给数学取的名称）的实际应用，帮助他们从中学的实践向现代的数学过渡，并用容易理解的材料向他们说明这门科学。因此，这本书首先供给教师与学习能力较强的学生阅读。

本书的大多数习题是独创的，但是并非全部如此：其中某些习题是大家熟悉的，有些是其他的作者编写的，在这种情况，如果知道作者是谁，我就写出他们的姓名。许多解答属于《数学》杂志的读者，他们的姓名列于本书的最后一页（这部分未译出。——译者），我感谢他们允许在这本书中运用他们的

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

解答.不少的解答属于《数学》杂志的主编伊凡什盖维奇教授,在这杂志上发表这些习题时,在我的习题正文中有着他的许多劳动,他改进了很多解法并且引导出了自己的推广与解题的思想(计划).在编写这本书时,最初,梅德尔斯基硕士帮助我,以后巴什可夫斯基硕士经常帮助我核验解答并且补充内容,最后编辑成书.一部分插图得自《数学》杂志,一部分是巴什可夫斯基绘制的.我感谢在这里所有提到名字的人对我的帮助.对于被我无意抄袭的作者,同样向他表示感谢(如果他们声明,我将在再版时写出他们的姓名).

尽管有许多人的帮助,我毕竟还应该援引一句拉丁谚语:即使现实落后于心愿,愿望本身也要受到赞扬.但是如果读者在一百个习题的例子中看到现代数学的意义与精神,我的主要目的就已经达到.

古伕.史坦因豪斯

# 目　录

一、数，等式与不等式（第 1～12 题）……………………1
二、点，多边形，圆，椭圆（第 13～28 题）………………4
三、空间，多面体，球（第 29～47 题）……………………8
四、实际问题与非实际问题（第 48～78 题）……………13
五、象棋，排球，追赶（第 79～92 题）…………………24
六、萨拉杰克博士的数学趣事（第 93～100 题）…………28
七、没有解答的题目…………………………………………31
解答…………………………………………………………38

# 一、数，等式与不等式

**1．乘法表的练习**　我们来作如下的数列：

设第一项为 2，第二项为 3，因为

$$2\cdot 3=6,$$

数列的第三项就取 6；因为

$$3\cdot 6=18,$$

那末，第四项取 1，第五项取 8；因为

$$6\cdot 1=6,\quad 1\cdot 8=8,$$

第六项取 6，第七项取 8，等等．

这样，我们得到数列：

$$2\ 3\ 6\ 1\ 8\ 6\ 8\ \cdots$$

两数之间下面的小圆弧表示相乘，所得的乘积就成为数列的下一个数．上面的数列接下去是 8 乘以 6，就写下得数 4、8．任何时候都不会发生乘数不足，因为每相乘一次，小圆弧只移动一步，而乘积至少是一位数，有时候还会是两位数，所以每相乘一次，数字至少增加一个．

证明：数 5、7、9 永远不会在这个数列中出现．

**2．数的有趣的性质**　用十进制任意写出一个自然数（例如 2583），计算这个数的各个数字的平方和（$2^2+5^2+8^2+3^2=102$）．再求所得数的数字平方和（$1^2+0^2+2^2=5$），以后都是用同样的方法计算．

$$(5^2=25,\ 2^2+5^2=29,\ 2^2+9^2=85,\ \cdots)$$

证明：如果这个过程中没有得出 1（显然，如果得出 1，那

末以后就是无限次重复地出现 1)，那末必定会得到数 145，此后就是下列各数的循环重复出现：

$$145,\ 42,\ 20,\ 4,\ 16,\ 37,\ 58,\ 89.$$

**3. 被 11 整除** 证明：对于任何自然数 $k$，数

$$5^{5k+1}+4^{5k+2}+3^{5k}$$

能被 11 整除.

**4. 数的整除性** 数

$$3^{105}+4^{105}$$

能被 13、49、181 与 379 整除，但不能被 5 与 11 整除.

怎样验证这一点？

**5. 简化的费尔马定理**① 如果 $x$、$y$、$z$ 是自然数，并且 $n\geqslant z$，那末等式 $x^n+y^n=z^n$ 不可能成立.

**6. 数的配置** 请找出十个数 $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $\cdots$, $x_{10}$，使

数 $x_1$ 在区间 $[0,\ 1]$ 内，

把区间 $[0,\ 1]$ 二等分，数 $x_1$、$x_2$ 分别在这两部分内，

把区间 $[0,\ 1]$ 三等分，数 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 分别在这三部分内，

把区间 $[0,\ 1]$ 四等分，数 $x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$ 分别在这四部分内，等等.

最后，把区间 $[0,\ 1]$ 十等分，数 $x_1$, $x_2$, $\cdots$, $x_{10}$ 分别在这十部分内.

**7. 推广** 上题中，如果所求的数由 10 个改为 $n$ 个（$n$ 是任意自然数），并使它们满足类似的 $n$ 个条件，题目是否可解？

**8. 字母的排列** 由字母 $aabbcc$ 组成的不同的排列有 90 种（这是有重复的排列：$\frac{6!}{2!2!2!}=90$. ——译者）. 在排列

① 所谓“费尔马定理”是指这样一个命题：当 $n>2$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有整数解. 这个命题到现在既未得到证明，又未能给以推翻. 这里把这个命题加上条件 $n\geqslant z$，这样，就可以证明命题成立. ——译者

$aabcbc$ 中，把字母 $b$ 换成 $c$，把 $c$ 换成 $b$，得到排列 $aacbcb$；把排列 $aacbcb$ 的顺序倒过来，得到排列 $bcbcaa$；再把这个排列的字母调换，可以得到排列 $acacbb$，等等。

象 $aabcbc$, $aacbcb$, $bcbcaa$, $acacbb$ 这样的排列，我们认为没有本质上的不同。但是，象 $aabcbc$ 与 $abcbca$ 两个排列，我们就认为有本质上的区别，因为，不论调换字母或者颠倒顺序，或者多次运用这两种变换，都不能够把一个排列变为另一个排列。

问题：由字母 $aabbcc$ 组成的，本质上不同的排列共有多少种？

**9. 比例** 数 $A$, $B$, $C$, $p$, $q$, $r$ 满足下列关系式：

$$A:B=p,\quad B:C=q,\quad C:A=r.$$

在比例式

$$A:B:C=\square:\square:\square$$

的空格中，填写由 $p$, $q$, $r$ 组成的式子，且每个式子都由另一个式子的字母 $p$, $q$, $r$ 进行轮换得到（即：如果把 $p$ 换成 $q$，$q$ 换成 $r$，$r$ 换成 $p$，那末第一个式子就变成第二个式子，第二个式子变成第三个，第三个变成第一个）。

**10. 对称式** 象 $x+y+z$ 或 $xyz$ 这样的式子是对称式。所谓对称式是这样的式子，其中变量 $x$, $y$, $z$ 不管以怎样的排列方法调换，式子的值都不变。上面的两个例子显然是对称式，但是有些式子的对称性却不是明显的，例如：

$$||x-y|+x+y-2z|+|x-y|+x+y+2z.$$

试证这个式子是对称式，并确定它的值，要求从这个值能明显地看出原式的对称性。

**11. 根的无理性** 用初等方法证明方程

$$x^5+x=10$$

的正根是无理数.

**12. 不等式** 证明不等式

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r}+\frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r}>\frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+r},$$

其中所有的字母都代表正数.

# 二、点，多边形，圆，椭圆

**13. 平面内的点** 在平面内已知几个(或几十个)点. 把每一点同最近的一点用线段连接. 我们假设每两点间的距离都是不相同的,因此每一点都有确定的最近的一点.

证明: 这样所得的图形，不含有封闭多边形或相交的线段.

**14. 角的研究** 设 $x_1$, $x_2$, $\cdots$, $x_n$ 是正数. 在平面内取一射线 $Ox$, 在这射线上截取 $OP_1=x_1$, 然后在 $OP_1$ 的垂线上截取 $P_1P_2=x_2$, 再在 $OP_2$ 的垂线上截取 $P_2P_3=x_3$, 等等. 直至 $P_{n-1}P_n=x_n$. 这里,直角的方向是这样确定的: 它的左方的一条边经过点 $O$. 我们可以认为,射线 $OX$ 绕着点 $O$ 从最初位置起，经过点 $P_1$, $P_2$, $\cdots$ 到最后的位置 $OP_n$ 为止，旋转了一个角度.

证明: 当 $x_i$ 给定,如果这些 $x_i$ 按下标是递降排列，即 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$, 那末这个旋转的角度最小; 如果下标按递增排列,那末旋转的角度最大.

**15. 三角形面积** 不用三角知识证明: 如果三角形中 $\angle A=60°$, 那末这三角形的面积 $S$ 可用下面的公式确定:

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}[a^2-(b-c)^2], \tag{1}$$

如果 $\angle A=120°$, 那末

$$S=\frac{\sqrt{3}}{12}[a^2-(b-c)^2]. \tag{2}$$

**16. 等分三角形周长** 任意取一个三角形，我们当然可以用一条直线，把这三角形的周长截成相等的两部分．我们甚至可以事先给定这条截线的方向．如果按不同方向画两条这样的直线，那末它们必定相交于某一点 $Q$．这时，过点 $Q$ 的两条直线都把三角形的周长二等分．

是否存在一点，过这点有三条这样的直线？如果存在，怎样求出？

**17. 重心** 设点 $P$ 是三个点 $A, B, C$ 的重心（谈及某三点的重心，就意味着这三点的质量相同）．设 $A_1, B_1, C_1$ 分别是下列三组点的重心：

$$B, C, P;\quad C, A, P;\quad A, B, P.$$

证明：$A_1, B_1, C_1$ 三点的重心是点 $P$．

**18. 三角形的分划** 把一个三角形分为 19 个三角形，使在所得三角形的每个顶点处（包括大三角形的顶点处），聚集着相同数目的边．（所谓在某点聚集着的边，是指所有以该点为公共端点的边．——译者）题中 19 这个数不可能改为更大的数，但是可以换成较小的数．为什么？

**19. 三角形** 设 $n$ 是自然数．在平面内给定 $3n$ 个点，其中任意三点不在一直线上．以这些点为顶点，能否画 $n$ 个三角形，使它们既不互相交叉，也没有一个三角形包含另一个三角形？

还可以提出类似的问题：对 $4n$ 个点作四边形，对 $5n$ 个点

作五边形等等．所有这些问题都可以解吗？

**20．三角形网(I)** 大家知道，整个平面可以用等边三角形的网遮盖．

如果这个网的每一个结点(即三角形的顶点．——译者)都给予一个确定的符号(正或负)，法则如下：如果三角形有两个顶点的符号相同，那末第三个顶点取正号；反之，第三个顶点取负号．这样能够办得到吗？

当然，你可以让每个结点都取正号，但是我们排除这种没有意义的解．

**21．三角形网(II)** 证明：整个平面不可能用这样的三角形网遮盖，在每一个顶点处都聚集着五个三角形(即每一顶点是五个三角形的公共顶点．——译者)．

**22．矩形还剩下什么？** 两条线段 $a$, $b$ 如果满足等式

$$a:b=b:(a-b),$$

我们就说这两条线段是黄金分割线段．如果一个矩形的两条邻边是黄金分割线段，这个矩形叫做黄金矩形．

我们设想用纸剪一个黄金矩形，把它平放在桌上，使它较长的一边朝向我们．然后紧靠矩形的左边剪去一个面积尽可能大的正方形(其实这个剪去的正方形的边长等于矩形较短一边的长．——译者)．剩下的仍然是一个黄金矩形．现在我们站到桌子的左边，于是又是矩形的较长的一边朝向我们．把这个新矩形再进行与上面同样的剪裁．这样，我们绕着桌子作顺时针方向运动，同时依次一个一个地剪去正方形．除了只有一个例外的点，矩形的每一点都迟早会被剪去．请确定这个例外的点的位置．

**23．四边形** 顺次连接凸四边形各边中点，得到一个小四边形．证明：这个小四边形是平行四边形，它的面积等于大

四边形面积的一半. 如果原四边形不是凸的，这个结论还成立吗？

**24. 正方形网** 平面可以用全等的正方形网遮盖. 这个网的结点，在数学上叫做整数格点.

能不能用字母 $a$, $b$, $c$, $d$ 表示这些结点，使每个正方形的四个顶点都分别是这四个字母(顺序不计. ——译者)，而且网的每一行与每一列都含有这四个字母中的每一个字母.

**25. 14=15** 1952 年，在弗劳兹拉夫举行的数学竞赛大会上，米古森斯基教授曾经指出，可以把整个平面分成许多七边形，使每个顶点处都聚集着三个七边形. 我想从这个结论出发，证明 14=15. 设 $P$ 表示 180°. 七边形的内角和等于 $5P$，因而每个内角的平均度数等于 $\frac{5}{7}P$. 因为整个平面可以用七边形遮盖，那末这些镶嵌的七边形，它的一个内角的平均度数也等于 $\frac{5}{7}P$. 但是在每个顶点处聚集着三个这样的角，所以在每个顶点处的一个角的平均度数等于 $\frac{2}{3}P$. 由此推出，这些镶嵌的七边形，它的一个内角的平均度数也等于 $\frac{2}{3}P$. 因为每一个角都属于某一个顶点，所以

$$\frac{2}{3}P=\frac{5}{7}P,\quad \frac{2}{3}=\frac{5}{7},\quad 14=15,$$

这就是我想证明的结论.

请找出上面推理中的错误.

**26. 多边形** 在平面内已知 $n$ 个点，其中任意三点不在一条直线上. 以这 $n$ 个点为顶点作封闭 $n$ 边形，使它的边互不相交，能办得到吗？

**27. 点与圆** 在平面内任给四点，它们既不共圆也不共

线．能不能用数字1、2、3、4分别表示这四点，使点4在过1、2、3三点的圆内？

**28．几何问题** 已知椭圆的长轴等于$2a$，短轴等于$2b$．请画一条封闭曲线，使它的周长等于椭圆的周长，而它围成的面积比椭圆的面积大$(a-b)^2$．

## 三、空间，多面体，球

**29．空间的划分** 经过一个定点作若干个平面，把空间分成尽可能多的部分．一个平面分空间成两部分，两个相交的平面分空间成四部分，三个相交于某一点而没有其他公共点的平面，分空间为八部分．四个相交于某一点的平面最多把空间分成几部分？$n$个平面呢？

**30．两个投影** 设平面$\Pi_1$同地球相切，切点是北极$N$，平面$\Pi_2$同地球相切，切点是南极$S$．从点$N$出发，把地球表面的每一点投影到$\Pi_2$上，我们可以画出一张地图；从点$S$出发，把每一点投影到$\Pi_1$上，我们又可以画出一张地图．这就是所谓球面投影．现在，把一个平面叠在另一个平面上面，使各条对应的经线重合．这样，一张地图的每一点都同另一张地图的一个确定的点对应，所以，我们规定了平面到自身的一个映射．怎样直接确定这个映射？（即这个映射关系如何用式子表示出来，并看出是怎样的变换．——译者）

**31．正方体** 把一个正方体模型拿在手里，使它绕着它的最长的轴（即正方体的对角线）旋转，然后用黑纱线紧密地缠绕在正方体上（线绕上可以滑脱的那些地方不能绕线——译者）．黑线只能遮住正方体表面的一半（为什么？）．我们还

可以把正方体绕另一条轴旋转，进行同样的缠绕．正方体总共有四条轴，每次缠绕上一种颜色的线(黑，红，蓝，黄)．这样，整个模型就被不同的颜色遮盖，如果不同颜色重迭的地方出现混合色(正方体模型是白色的，这个颜色我们不考虑在内)，正方体上共有几种颜色？哪几种？一条棱上有几种颜色？正方体上有几层线？每一个面的颜色是否各不相同？

**32．不需要数学知识的题目**　在一个固定不动的正方体上，绕上药房里药盒上的那种橡皮圈，使它们互不交叉(这里所说的橡皮圈可能就是我们一般文具店出售的橡皮筋．本题的正方体我们设想它的表面非常光滑没有摩擦力，把橡皮筋套在正方体上，由于橡皮筋的弹力，它将使自己的周长保持最小．——译者)．

这样的橡皮圈所经过的路径，叫做短程线．

(1) 遮盖正方体表面的短程线共有几层(即经过正方体表面的每一点有几条短程线)？

(2) 遮盖正方体表面的不同短程线族有几族？

**33．分子运动**　无外力作用的质点在正方体容器内运动，碰到容器壁时，按经典定律弹回(入射角等于反射角，过反射点垂直于平面的直线，是分子进入与弹出的两直线所成角的平分线)．是否可能有这样的分子，它不停地沿着一个封闭六边形运动，依次碰击正方体容器的每一个面？

**34．正方体的展开面**　多面体的模型可以由它的展开面做成．在展开面中，多面体的各个面以棱为界互相连接．把硬纸的展开面沿着棱折合，就可以做成模型．正四面体(等边三棱锥)的这样的展开面有两种不同形式．正方体的展开面有几种不同形式？

**35．正方体**　大家知道，用全等的正方体，可以填满整个

空间．每一个顶点处聚集着八个正方体．把每个正方体，以适当的方法切去一个角，把切得的部分连成一体(可以形成一个正八面体．——译者)．这样，用正八面体以及正方体被切后剩下的形体，可以填满空间．这个剩下的是怎样的形体？如果使这正八面体的体积为最大，这些正八面体占空间的几分之几？这时，正方体被切后所剩的形体的各个面是什么形状？每个顶点处聚集着几个形体？

**36．六面体**　是否存在由全等的菱形(非正方形)围成的六面体？

**37．各个面都全等的四面体**　能不能作一个四面体，使它所有的面都是全等的三角形，而这些三角形的三边 $a$、$b$、$c$ 是任意给定的？

如果能作出，请计算这四面体的体积．

**38．八面体**　能不能作一个八面体，使它的各个面是全等的四边形？能不能作一个十面体或一般地 $2n$ 面体($n>3$)，使它具有同样的性质？

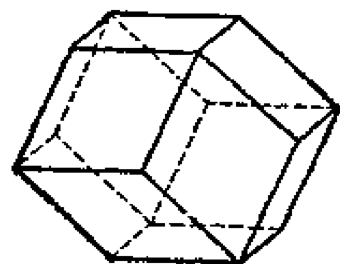


图　1

**39．苍蝇的旅行**　苍蝇停在正十二面体模型的一个顶点上，它决定沿着棱前进，最后回到出发点，做到经过每个顶点，但是同一顶点不经过两次．它的旅行计划成功了．然后它打算在以菱形为面的正十二面体(图1)上，用同样的办法试一试．这个企图能成功地实现吗？

**40．正十二面体**　可以用四种颜色分别涂在正十二面体的各个面上，使任何两个相邻面上的颜色都不相同．证明：本题只存在四个解，如果两个模型通过旋转，可以使它们的颜色配置相同，只算作一个解．

**41. 内接多面体** 各面是五边形的正十二面体可以内接一个正方体，使正方体的棱是这些五边形的对角线. 这样的内接正方体的作法有好几种，请问共有几种？全部这样的正方体形成一个星体. 如果十二面体的体积是1，这个星体的体积是多少？

所有正方体的公共部分，形成怎样的形体？

**42. 多面体** 凸多面体的面一定是凸多边形. 反过来，一个多面体如果各个面都是凸多边形，它一定是凸多面体吗？特别地，是否存在这样的两个多面体(例如两个三十面体)，它们由个数相同的对应全等的面围成(同一个多面体的各个面不一定全等)，而其中一个多面体是凸的，另一个不是凸的？

**43. 非凸多面体** 能不能由全等的四边形围成一个非凸多面体？

**44. 正多面体模型** 从正四面体的六条棱中可以选出四条，形成一个封闭的空间四边形. 这个四边形可以看成是原四面体的模型，因为它包含了四面体的全部顶点. 用同样的方法，我们容易从正方体得到一个八边形，它包含正方体的全部顶点. 这个方法能不能推广到其他正多面体，即正八面体，正十二面体，正二十面体？各有几个解？

**45. 来自奇异国家的题目** 寓言作家与数学家刻洛尔是奇谈怪论的创作者. 例如，他曾建议使用比例尺为1:1的地图，因为把这张地图铺在地上，你不论什么时候要想知道自己在什么地方，只要简单地读出地图上写着的地名或记号就可以了.

我们设想，如果采用这个建议，就要在地球上把陆地、海洋分别涂上各种颜色，画上经线、纬线，用很端正的字写上城市、港口与国家的名称. 罗盘仪将成为多余的. 但是毕竟还

存在一个困难：怎样求出到一个已知点的最短路径．大家知道，在这张来自奇异国家的地图上，大圆线(即最短路径)并不是恒向线(即同各条经线都交成定角，同各条纬线也都交成定角的线)．更大的毛病是，不论怎样重新改画坐标线，都不能消除所有坐标系统的这个缺点．当然，过错在于地球，它的形状做得不实用．

为了改造地球，最好从地图开始．例如，我们可以画一张由经线与纬线组成的直角网格，把这张地图卷在圆柱上，使纬线变成圆周．在这个圆柱形行星上，两点间的最短路径永远与所有经线交成定角．同样地，我们可以在直角网格上取一结点记作 $N$，把这张地图沿着过点 $N$ 的半条纬线剪开，然后卷在圆锥上，使点 $N$ 与圆锥的顶点重合．圆锥形行星上点 $N$ 是北极，纬线互不相交，经线也互不相交．但是，同地球上情况一样，每一条纬线同每条经线有两个交点．与上面的相同，最短路径也有恒定的方向．

但是，还可以找到更有趣的模型．地图上的坐标线是直角网格，而在行星上只出现一族线，其中的每一条线同任意另一条线相交于两点，而同自身相交于一点．恒定方向的原则仍旧保持．这个模型是什么？当我把上述两个模型告诉诺凡可夫斯基硕士，他立即确定出第三个模型，直角网格由经线、纬线与“联络线”组成．

**46．球的堆垒(I)**　我们有无数个完全相同的球．取三个球，使它们两两相切放置，然后放上第四个球，使它同这三个球都相切．这样，就形成四个凹穴，在每个凹穴再放上一个球，这样，我们一共放了八个球．它们形成几个凹穴？要在外面形成新的一层，应该再放几个球？

这个过程可以一直继续下去吗？

**47. 球的堆垒(II)** 我们有无数个完全相同的球．取出一个，并在它的外面放上十二个都同它相切的球(使这十二个球中每相邻的球也都相切．——译者)．以后放上的十二个球形成几个凹穴？能不能在每个凹穴都放上一个球？第三层由几个球组成(第一层一个球，第二层十二个球)？以后的每一层能否总能在每个凹穴都放上一个球？

## 四、实际问题与非实际问题

**48. 课本里排错的字** 某作者在阅读他自己写的课本时，发现有这么一句话："从60°角的顶点开始，在一边截取9厘米的线段，在另一边截取…厘米的线段，求两个端点间的距离"，其中在…处排错了字：排字工人把厘米数排成比原稿上的多1．当然，排字工人不想改动课本后面的答案．虽然如此，排错了字并不导致错误(即题目与它的答案仍相符合——译者)．请问，排字工人在题目中…处排的是什么数？

**49. 疑谜** 著名的生物学家德姆波夫斯基教授发明了一个玩具：在圆形的厚纸板上画一个小的同心圆，把小圆分成八个相等的扇形，四个涂白色，四个涂黑色，黑白相间．把剩下的圆环分成相等的十部分，同样黑白相间地涂上颜色．在圆的中心穿一枚钉，然后使圆纸板快速旋转．开始时，这些扇形融合成单一的灰色．但是，接着就出现这样的情况：虽然圆环与小圆在同一块厚纸板上，但圆环向一个方向旋转，而小圆向相反方向旋转．

这个玩具只有在电灯光下才灵验，而不是在每个地方都适用的．为什么？

**50．节日的火腿**　三个女邻居每人出十五个卢布买了火腿(不带皮、油与骨)．其中一个人把火腿分成三块，她肯定地说，每块都一样重．第二个人说，要到商店里称过我才相信．这三块看起来一样重的火腿，到商店称了以后计算价钱，结果分别是 14，15，16 卢布．第三个人把火腿拿到自己家里再称，得到又是另外不同的重量．于是她们争执起来，因为第一个人坚持说三块是分成一样重的，第二个人只承认商店称得的重量是准确的，第三个人则相信自己称得的重量．怎样把三块火腿分给这三个人(不再割补)，使争执平息下来，做到每个人得到的那块火腿按她所承认的重量计价，都至少是 15 卢布．

**51．分饼**　每个饼不论什么形状，都可以用互相垂直的两刀切成相等的四块．换句话说，对于每个面积为 $P$ 的平面区域，都可以找到两条互相垂直的直线，把这区域分成四部分，每一部分面积都等于 $\frac{P}{4}$．

证明这个定理，实际上比把边长为 3、4、5 的三角形分成四个相等部分要容易得多．

**52．分三角形蛋糕**　巴维尔与加维尔分一块三角形的蛋糕．加维尔提出条件：他要沿着一条直线切开蛋糕，而且让他先挑选其中的一块．巴维尔同意了，并且提出条件：要由他先确定一点 $P$，然后沿经过这点的直线切开．因为蛋糕各处的厚度与质量都是一样的，所以本题归结到如下的平面几何问题：巴维尔应该怎样确定点 $P$，使他分得的那一部分的面积尽可能的大？第二个问题是，如果巴维尔成功地解决了第一个问题，而加维尔切得尽可能大的蛋糕，问巴维尔比加维尔少分得多少蛋糕？

如果蛋糕的形状由巴维尔选择，那末他应该取有中心的图形(如圆，正方形，椭圆)，把点 $P$ 定在这个中心(严格地说，应该是中心对称图形，把点 $P$ 定在对称中心．——译者)，这时加维尔就占不到便宜．但是，有趣的问题是：保持最初所述的分配条件，怎样形状的蛋糕，对加维尔最有利？当他成功地选定蛋糕的形状后，他可以保证自己比巴维尔多分得的蛋糕至少是多少？

**53．他的生日是哪一天？** 涅维亚多姆斯基邀请了许多人庆祝他的生日，其中有著名的旅行家彼丹特克维奇．

有人问彼丹特克维奇，一年前的今天你在做什么？他拿出笔记本带着素有的学究习气回答说："刚好是一年前的今天，日出的时候我走出帐篷，向正南方走了一里或稍多一些路，然后向西拐弯，经过几个小时，什么野兽也没有猎取到，我就向北折转最后回到帐篷，在我向北走的全部时间内，没有穿过我自己走过的道路"．请问，涅维亚多姆斯基的生日是哪一天？

**54．索菲亚·谢尔盖夫娜几岁？** 我们的熟人索菲亚·谢尔盖夫娜还不算老，因为她出生于第一次世界大战以后．但是你要是问她有多大岁数，她不喜欢直接回答．

有人问她，1950 年 7 月 27 日你几岁，她回答说：我才一岁，因为只有当每年生日的星期数与我出生那天的星期数相同的时候，我才庆祝我的生日．而这样的生日，我才庆祝过一次(星期一的星期数为 1，余类推，星期日的星期数为 7．——译者)．

请问，索菲亚·谢尔盖夫娜有多大岁数？

(这里使用称呼"索菲亚·谢尔盖夫娜"，按习惯表示已婚．——译者)．

**55．池塘里有多少条鱼？** 某鱼类学家想确定池塘里有

多少条适于捕捞的鱼. 为此，他撒下一张网(网眼大小事先已经选好). 收网一数，捕得 30 条鱼. 他把每条鱼做上记号再放回池塘. 另一天，撒下同一张网，捕得 40 条鱼，其中有两条鱼是已经做上记号的. 根据这两个数据，怎样近似地算出池塘中鱼的数量?

**56. 测定小轴的直径** 汽油发动机有一个形如小轴的零件. 为了测量小轴的粗细，在一块钢板上钻十五个孔径非常精确的孔. 第一孔的直径是 10 mm，以下每个孔的直径比前一个大 0.04 mm. 要测小轴的直径，只要把它插到这些孔中. 如果插不进，就认为它的直径大于孔径，如果插得进，就认为它小于孔径. 这样，最后确定小轴的直径，误差不小于 0.04 mm(对于小于 10 mm 或大于 10.56 mm 的小轴，只要改进孔径大小即可).

工人测定小轴直径时，每根小轴的插孔次数都相同(当然所插的孔不完全相同). 试问，测量一根小轴，必须作几次插孔试验? 试验的顺序应当怎样?

**57. 一百二十个钢珠** 精密机械工厂订购 120 个直径为 6.1 mm 的钢珠. 120 个钢珠送来了，但是测量表明，精确度不符合要求. 测量结果如下:

10 个钢珠的直径为 6.01 mm,
6 个钢珠的直径为 6.02 mm,
4 个钢珠的直径为 6.03 mm,
10 个钢珠的直径为 6.05 mm,
19 个钢珠的直径为 6.07 mm,
11 个钢珠的直径为 6.08 mm,
6 个钢珠的直径为 6.10 mm,
6 个钢珠的直径为 6.11 mm,

8 个钢珠的直径为 6.12 mm,

10 个钢珠的直径为 6.14 mm,

17 个钢珠的直径为 6.16 mm,

6 个钢珠的直径为 6.17 mm,

7 个钢珠的直径为 6.18 mm.

幸好，另一个工厂同意接受这批钢珠，它提出条件：钢珠要装两箱，一箱钢珠的直径较大，另一箱较小，每一箱的外面要写明箱内全部钢珠的共同直径.

本题要求确定临界的直径，使直径比它小的钢珠装入 $A$ 箱(因而直径比它大的装入 $B$ 箱)，同时要求找出每箱写明的直径 $a$、$b$，使这两个数的绝对误差的和最小. 这里的绝对误差是指钢珠直径与箱上写明的直径的差的绝对值.

**58. 管子上的带子** 厚为 0.1 mm、长为 25 m 的带子紧紧地卷在厚纸板做的管子的外面，得到一个直径为 1 dm 的小轴，问管子原来的外径是多少？

**59. 两枚针完全一样的时钟** 大家知道，如果没有钟表，任何人也可以确定时间，误差总不会超过 6 个小时.

钟表匠遇到一个两枚针完全一样的时钟，因而分不出长针与短针. 试问，对时钟主人有可能的最大误差是多少？

**60. 高个子与矮个子** 一个班级的学生身长都不相同. 体育课上，教师把全班学生排成方形的队伍，然后说："现在我们来看看谁是你们中间最高的矮个子". 他在每一直行中挑出一个最矮的学生，然后把这些"矮个子"在前面排成一行，再从中选出最高的一个，说："这就是最高的矮子".

这些学生回到原来的位置后，教师说："现在我给你们指出最矮的高个子". 他在每一横行挑出一个最高的学生，把这些"高个子"排在前面，再从中选出最矮的一个，说："这就是最

矮的高个子”.

同一个学生能不能既是最矮的高个子，又是最高的矮个子？是否存在这样的班级，最矮的高个子的身长比最高的矮个子小？如果教师在每一直列中找高个子，而不在横行中找(也就是同找矮个子的方法一样)，得出的答案又是怎样？

**61．$A$ 班与 $B$ 班的学生** 学校里有两个班级 $A$ 与 $B$. $A$ 班的学生夸耀他们的身长比 $B$ 班的高，而 $B$ 班的学生认为自己的数学成绩好．有一次，$A$ 班的一个学生高傲地瞟了一下 $B$ 班的一个学生．那个 $B$ 班的学生问：老实说，你们比我们高，这究竟是什么意思？这是不是表示：

(1) 你们班里任何一个人比我们班里任何一个人高？

(2) 你们班里最高的人比我们班里最高的人高？

(3) 对于 $A$ 班任意一个学生，都可以在 $B$ 班找到比他矮的学生吗？

(4) $B$ 班每一个学生都至少比 $A$ 班的一个学生矮吗？

(5) 对 $A$ 班每一个学生，是否都可以在 $B$ 班指出一个比他矮的学生，并且使 $A$ 班不同的学生对应 $B$ 班不同的学生？

(6) 对 $B$ 班每一个学生，是否都可以在 $A$ 班指出一个比他高的学生，并使 $B$ 班不同的学生对应 $A$ 班不同的学生？

(7) $B$ 班最矮的学生比 $A$ 班最矮的学生矮吗？

(8) $B$ 班中比 $A$ 班最矮的学生还矮的学生人数，大于 $A$ 班中比 $B$ 班最高的学生要矮的学生人数吗？

(9) $A$ 班学生身长的和，大于 $B$ 班学生身长的和吗？

(10) $A$ 班学生的身长平均数，大于 $B$ 班学生的身长平均数吗？

(11) 你们班(指 $A$ 班——译者)中比我们班的任何人都高的人数，多于我们班中比你们班的任何人都高的人数吗？

(12) 你们班中比我们班平均身长高的人数，多于我们班中比你们班平均身长高的人数吗？

(13) 你们班身长的中位数大于我们班身长的中位数吗？(把学生身长按大小次序排列，如果人数为奇数，当中那个身长就是身长的中位数；如果人数为偶数，当中两个身长的算术平均数是中位数. ——译者)

一连串吃惊的问题，似乎使这个 $A$ 班的学生变得矮小了. 我们问教师：这些问题互相有依赖关系吗？如果有，请指出哪几个问题之间有依赖关系？换句话说，就要找出这样的成对的问题，其中一个问题的回答如果是肯定的，就必定使第二个问题的回答也是肯定的. 是否存在等价的问题，即是否存在这样的一对问题，它们的答案是完全相同的？是否存在一对有依赖关系而不是等价的问题？

**62. 统计学** 有些地区的火车车厢，分为供吸烟者用与供不吸烟者用两种. 某统计学家决定，研究各地铁路供不吸烟者用的车厢使用情况. 他列出下面几种可能：

$a$) 吸烟的旅客大多数在供吸烟者用的车厢里；

$a'$) 非 $a$(“非 $a$” 表示命题 $a$ 的否定)；

$b$) 不吸烟的旅客大多数在供吸烟者用的车厢里；

$b'$) 非 $b$，

$c$) 供吸烟者用的车厢中的大多数旅客是吸烟的；

$c'$) 非 $c$；

$d$) 供不吸烟者用的车厢中的大多数旅客是吸烟的；

$d'$) 非 $d$.

用左上角带撇或不带撇的四个字母 $a$、$b$、$c$、$d$ 组成的记号，可以刻划每个地区的特点. 当然，在每个记号中，带撇与不带撇的同一个字母不可能同时出现，因为每一个带撇的命

题，同相应不带撇的命题相互矛盾的．因此所有可能的记号共有16种．

能不能把十六列火车的旅客混合后重新分配，使每列火车的记号都与原来的记号不同？

**63．银行的题目** 设钱币的票面值有1分，2分，5分，1角，2角，5角，1元，2元，5元等种．如果某人有钱5元2角7分，那末其中必定含有金额和为2分的钱币，但是可能找不到金额和为1角7分的钱币．这一点我们可以这样理解：没有2分的钱币或两个1分的钱币，不能组成5元2角7分；但是5元2角7分也可以由票面值为5元，2角，5分，2分的钱币组成，这时，它就不可能含有金额和为1角7分的钱币．有了这样的说明，“某金额的钱数中必定包含另一金额和的钱币”这句话的意义就清楚了．

从1分到9元9角9分的诸钱数中，必定包含最大的不同金额和的钱币种数是多少？

**64．公园** 我们假设有$m$个公园，有$n$个品种的树木，但不知它们的精确数字．其中有$s_1$个公园，每个各只生长一个品种树木(这些品种不一定相同)，有$s_2$个公园，每个各只生长两个品种树木，…，有$s_n$个公园，各生长$n$个品种的树木(即所有$n$个品种的树都有)．另外，$n$个品种的树木中，有$g_1$个品种各只在一个公园中生长，有$g_2$个品种各只在两个公园中生长，…，有$g_m$个品种每种在$m$个公园中生长(即在所有的公园中生长)．试问，数$s_1$，$s_2$，…，$s_n$，$g_1$，$g_2$，…，$g_m$，$m$，$n$之间存在怎样的关系？

**65．多余的劳动** 几十根柱子沿着一条道路等距离地放着．如果我们想给每根柱子钉一枚钉，那末最好从第一根开始，到最后一根结束．试问，最坏的做法(即所走的路程最长)

是怎样的？

**66．长方体的对角线** 砖头的形状是长方体．现在要求只用一根有刻度的直尺量出它的对角线的长（即相距最远的两顶点间的距离）．

请指出适合于车间操作的实际测量办法（而不是学校里那种应用勾股定理的例子）．

**67．箱子的捆扎** 形状为长方体的小箱子，通常用十字形方式捆扎：绳子在上底中心 $N$ 与下底中心 $P$ 相交成直角．

证明：当绳子在 $N$ 与 $P$ 两处加以牢固的连接，它就不能作任何移动．

**68．其他的捆扎方式** 糖果店捆扎长方体形的糖果盒用另一种方式：带子斜着捆扎，形成一个空间八边形．从上面看去，带子是两条平行线段，从下面看，也是一样．已知小盒子的长、宽、高，可以算出带子的长以及带子同小盒各棱相交的角度．最后，可以证明，带子不仅能够沿着自身的路径滑动，而且能够沿着盒子滑动．

**69．杆秤** 杆秤是一根木制（或金属的）质量均匀的细杆，一端挂上秤砣，另一端有一个钩子，用以悬挂要称的物体．杆上有刻度，可以读出物体的重量．为此，要在秤杆上找出一点，用销钉（或刀尖）支撑这一点就得到平衡，这一点的刻度指出所求的重量．如果有砝码的话，刻度很容易通过试验作出．砝码的种类越齐全，刻度就越精确．

如果我们只有一个例如一公斤的砝码，怎样用几何方法作出刻度？

**70．长度的极小** 把直尺 $L$ 钉在桌子上，另一根活动直尺 $R$ 的一个角尖，沿着直尺 $L$ 的一边滑动（参看124页图128），同时这根尺的一边始终紧靠着桌上的一枚钉 $O$，这一边的端

点是角尖 $A$. 当直尺 $R$ 这样运动到某个位置时，距离 $AO$ 将达到极小. 试求这个位置，并计算极小的距离 $AO$(已知钉子 $O$ 到固定直尺 $L$ 的距离，以及活动直尺的宽度).

**71. 长方形和正方形的分划** 如果把一个长方形分成两个长方形，那末，很明显，这样的图形配置是一次分划产生的结果，不可能由其他方法产生. 但是，如果我们把已知长方形分为三个长方形，那末谁也不能猜中，这样的图形配置是一次直接分成三个，还是先把原来的长方形分成两个，然后再把得到的两个长方形中的一个分成两个小的长方形. 把长方形分为两部分，我们称它是基本分划，分为三部分不是基本分划. 确切地说，一个分划如果不可能由连贯的分划产生，就叫做基本分划①(至于它实际上如何产生，那是没有关系的). 这个定义是洛斯教授给出的，他指出，存在把长方形分成 2, 5, 7, 8, … 部分的基本分划，但不存在把长方形分成 3, 4, 6 部分的基本分划. (请读者证明，不存在把长方形分成 3, 4 部分的基本分划；并找出把长方形分成 5, 7 部分的基本分划. 雷尔-那尔泽夫斯基教授证明了不存在把长方形分为 6 部分的基本分划).

(1) 举出把正方形分成 5 个相等部分的基本分划的例子.

(2) 举出把正方形分成 7 个相等部分的基本分划的例子.

---

① 把一个长方形分成若干个较小的长方形，就叫做一个分划；如果再把所得一个较小的长方形分成若干个更小的长方形，又是一个分划. 但是最后所得的图形对于最初的长方形来说，是两次连贯分划的结果，就不算基本分划. 所谓基本分划是指不可能由连贯分划产生的那些分划. 容易看出，连贯分划产生的图形中，总可以找到若干个小长方形，它们能够连成一个较大的长方形，而基本分划产生的图形中就不存在这样的小长方形. ——译者

(3) 举出把正方形分成8个相等部分的基本分划的例子.

**72. 实际问题** 某工厂厂区的地面平坦而倾斜. 现在有一架水准测量仪器，其中有能够绕垂直轴转动的水平望远镜(可以从水平度盘上读出旋转角)，还有标尺. 我们瞄准标尺，可以读出高差及到标尺的水平距离(利用望远镜中的上丝与下丝在标尺上的读数). 怎样用最简单的办法，确定厂区地面的倾斜度及倾斜的方向?

**73. 城市的近邻** 在欧洲的地图上，我们把每个城市同与它直线距离最近的城市连接起来. 这里假设任意两个城市之间的直线距离都不相等.

证明：没有一个城市可以同邻近的五个以上的城市连接(本题地图不一定是欧洲地图. ——译者).

**74. 铁路网(I)** 五个城市中，任意三个不在一条直线上. 现在要把这五个城市，用四条直的铁路组成的铁路网连接起来，可以利用"高架桥"使一条铁路在另一条的上空经过.

这样不同的铁路网共有几种?

**75. 铁路网(II)** 城市 $A$, $B$, $C$, $D$ 在边长为100公里的正方形的顶点上. 现在要设计一个铁路网，使每个城市都与其他三个城市连接(允许在 $A$, $B$, $C$, $D$ 之外建立枢纽站)，并且要求铁路的总长为最小. 试画出所求的铁路网，并求出它的总长度.

**76. 试验性飞行** 一架新型飞机从奥斯陆飞出，沿着到南美洲赤道上某地机场 $X$ 的最短路线飞行. 在奥斯陆目睹飞机离开的人，看见飞机好象在正西方地平线变为一点而消失了.

飞机的航向是怎样的? 在 $X$ 地的机场迎接的观众，应该

朝地平线的哪一点等候飞机?

如果知道奥斯陆的位置在北纬 59°55′, 东经 10°43′, 不用计算就可以回答这个问题. 谁有南美洲的地图, 可以很容易地找到机场 $X$.

**77. 太阳与月亮** 太阳到地球的距离是月球到地球距离的 387 倍, 问太阳的体积是月球体积的几倍? (这里假定从地球上看去, 太阳与月亮"一样大", 即它们的"视角"相等. ——译者)

**78. 初级天文学** 试计算弗劳兹拉夫市最短的昼长. 解答这个题目要知道两个角度. 哪两个?

## 五、象棋, 排球, 追赶

**79. 棋盘** 设一个长方形或正方形的棋盘, 有奇数个方格(例如 49 或 63 个). 有公共边的方格, 叫做相邻的方格.

棋盘的每一个方格放一个卒子, 然后统统收起来再按每方格一个放到棋盘上.

这时每个卒子所在的方格, 能不能全部与原来该卒子所在的方格相邻?

**80. 再谈棋盘** 在正方形棋盘的每个方格放一个卒子. 把卒子统统收起来重新放到棋盘上, 使左边两角上的卒子仍旧在原来的位置, 并且使原来相邻的卒子(即所在的方格是相邻的)仍旧保持相邻.

能不能使任何卒子都放在与原先不同的位置上?

**81. 棋盘上的车** 本题我们使用的棋盘的行数与列数相等, 但是同通常的国际象棋棋盘不一样, 白格与黑格可以任意

配置(两者个数也可以不相等. ——译者), 只要每一列至少有一个白格, 同时至少有一列全部是白格就可以. 假设我们有足够多的车,不会发生车不足的情况. 如果满足下列条件,我们说成功地放置了车: (1) 车只放在白格上, (2) 棋盘上至少有一个车, (3) 车不互相攻击(即它们中一个不能吃掉另一个)(只当同一行或同一列有两个车才有互相攻击. ——译者), (4) 每一个没有放车的但遭受水平方向的车威胁的白格,同时也遭受垂直方向某个车的威胁.

证明: 根据(1)、(2)、(3)、(4)的要求安排车永远是可能的.

**82. 椭圆形球台** 球 $A$ 在椭圆形球台的边缘上,球 $B$ 在连接椭圆两焦点的线段 $s$ 上. 现在要把球 $A$ 打到球台边缘弹回来撞到球 $B$, 但是不许球 $A$ 在打到球台边缘前穿过线段 $s$.

证明: 本题无解.

**83. 体育运动的题目** 班级里有 25 个学生, 其中 17 人会骑自行车, 13 人会游泳, 8 人会滑雪. 这三个运动项目全都掌握的学生一个也没有. 但是不论会骑自行车的或会游泳的,或会滑雪的学生,他们的数学成绩都是良好或及格. 这点是值得注意的,因为全班有六个人数学不及格.

试问: 全班数学成绩优秀的学生有几个? 有几个人既会游泳又会滑雪? (学生数学成绩分为优秀,良好,及格,不及格四种. ——译者)

**84. 体育运动决赛的理论** 萨拉杰克博士的象棋俱乐部总共有十个成员. 为了把棋手分等级, 每年都要进行决赛. 每个人都同其他的人比赛到第一个有胜负的一盘为止(平局不计). 如果在今年分级决赛中 $A$ 战胜 $B$, 我们就说"$A$ 胜

$B''$. 比赛总共是 45 次，棋手就根据得胜次数分等级，例如胜 8 次，胜 7 次等等. 我们要注意，这种 45 盘决赛制有可能出现 $A$ 胜 $B$, $B$ 胜 $C$, $C$ 胜 $A$.

问题是，所分成的等级有几种可能的结果？特别地，能不能把俱乐部成员分成三个不同的等级？

**85. 排球队联合会** 优秀排球队联合会举行季节性比赛，每一队都同别的队比赛一次. 如果存在 $C$ 队，有 $A$ 队胜 $C$ 队，$C$ 队胜 $B$ 队，我们认为 $A$ 队间接胜 $B$ 队. 但是如果 $A$ 胜 $C$, $C$ 胜 $D$, $D$ 胜 $B$, 我们不认为 $A$ 间接胜 $B$. 冠军可能是战胜所有其他队的那一队，但是这也不一定. 一个队如果通过平常直接比赛或者间接方式（即通过第三队）战胜任何其他的队，我们就同意它是冠军.

证明：(1)联合会的决赛永远可能出现一个或多个冠军；(2)直接得胜次数最多的队一定是冠军.

**86. 骑车者与步行者** 国营农场的经理派遣一个通信员步行送信到城里邮局，四小时后，又派另一个通信员按相反的方向步行送信到邻村的村政府. 经理忽然想到这两封信调错了，于是又派一个人骑自行车去追赶两个送信人以便把信对调过来. 骑自行车的人想，两个送信人的速度是一样的，那么应该先去追赶早出发的送信人，还是先去追赶晚出发的送信人，他犹豫不决. 自行车的速度快，所以无论哪种情况都是可以完成任务的.

解这个问题的读者请再考虑：如果经理没有把信搞错，只是忘了把钱交给这两个送信人，现在要派人骑车把钱分别交给他们，骑车人应该怎样解决？

**87. 四头狗** 四头狗 $A$, $B$, $C$, $D$ 分别站在正方形草地的四个角顶. 它们突然开始按箭头方向互相追赶.

每头狗都朝着相邻的狗跑：$A$ 朝着 $B$，$B$ 朝着 $C$，$C$ 朝着 $D$，$D$ 朝着 $A$. 草地的边长等于 100 米，每头狗跑的速度都是 10 米/秒.




这四头狗经过多少时间相遇？它们的路径相交吗？在什么地方相交？每条路径的长是多少？

**88．追赶(I)** 军舰 $P$ 发现了军舰 $Q$．军舰 $Q$ 按垂直于 $PQ$ 的方向航行，并保持自己的方向．军舰 $P$ 总是朝着军舰 $Q$ 追赶，每个时刻两舰的速度都相同(但是速度随时间而改变)．不用计算就可以看出，军舰 $P$ 是沿着一条曲线行驶的．如果追赶持续相当长的时间，那么军舰 $P$ 的路径与 $Q$ 的路径最后几乎重合．如果最初两舰相距 10 海里，问这时的距离 $PQ$ 是多少？

**89．追赶(II)** 军舰 $O_1$ 发现了另一艘军舰 $O_2$，这时军舰 $O_2$ 正沿着垂直于直线 $O_1O_2$ 的方向航行．军舰 $O_2$ 没有发现 $O_1$ 的信号，它仍旧保持自己原来的航向与速度 $v_2$．因为需要援助 $O_1$，军舰 $O_2$ 想引起 $O_1$ 注意它，于是用最大的速度 $v_1$ 朝这样的方向航行，使得它能够尽可能驶近 $O_2$．试问，它应该朝什么方向航行？如果两舰最初距离等于 $d$，速度的比 $\frac{v_1}{v_2}$ 等于 $k$(小于 1)，那末在最接近的时刻两舰的距离是多少？

**90．题目的条件真的不完全吗？** 某人不很仔细地读了上面这道题目，告诉萨拉杰克博士，并问他：怎样根据题目的条件确定航行方向？可惜这个人忘了哪艘军舰的速度大，哪艘军舰的速度小，不过他知道两舰速度的比 $k$ 是已知的，并且 $k$ 小于 1．但是他不知道，比值 $k$ 是表示军舰 $P$ 与 $Q$ 的速度的比还是相反．当萨拉杰克博士根据这样不完全的条件立

即确定所求的航行方向时，这个人觉得非常惊奇．请问，萨拉杰克是怎样解这个问题的？

**91．摩托艇(I)** 走私摩托艇的速度是警戒船速度的3倍．摩托艇想到达岸边某一点，警戒船的位置在该点到摩托艇的连线的中点处．摩托艇决定沿着一个正方形两邻边的路径向岸边那个目标行驶．这条路径的哪一部分是危险的？

**92．摩托艇(II)** 上题中，摩托艇决定沿着一个矩形两条邻边的路径行驶(即行驶过程中作一次90°的转弯)，它应该选择怎样的航线，使能有把握地避开警戒船，并且尽可能快地到达目的地？

# 六、萨拉杰克博士的数学趣事

**93．奇怪的数** 萨拉杰克博士决心从根本上改变数学的书写方式．他说，有一个数，连刚进小学念书的儿童都认识，它除了通常的写法外，还有另一种写法，但要等到几年以后，这些儿童才认识．这个数更有第三种相当复杂的写法，要到年龄更大些才知道(遗憾！)．他认为这是一个很大的缺点．这个数是什么，任何人也说不出．只有萨拉杰克博士与它的朋友知道这个秘密．请问，这个数究竟是什么？

**94．"厘米尺"** 有厘米刻度的带子，裁缝师傅叫做"厘米尺"．萨拉杰克博士有另一种与平常不同的"厘米尺"，它的外形如图2所示(图中只画出带子的一部分)，带子的开头有半厘米长的包布．萨拉杰克博士确信他的"厘米尺"比平常的好，为什么？

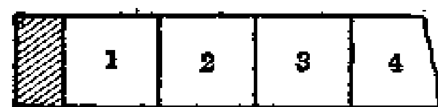


图 2

**95. 大学生的债务** 七个大学生住在同一座房子里．一年之内，他们互相之间借过少量的钱．萨拉杰克博士告诉他们，每个人只要记下每次他借了人家多少钱，或者人家借了他多少钱，不要记下向谁借或谁来借．快放假的时候，大学生要结帐，但是他们不知道帐该如何算．要使大学生能正确地互相付清欠款，萨拉杰克的这种记帐法是否足够？在最坏的情况下，总共必须经过几次付款？（一个人把钱交给另一个人，我们叫做付款．）

**96. "第二号秘诀"** 萨拉杰克博士能够解任何题目．有一次，他的朋友带给他12个外形完全相同的一元钱币要他试验："其中十一个，我相信它们不是假的，但是第十二个可能是假的，可是我不知道它比真的钱币轻还是重"．说完，他把钱币倒在桌子上，扬声地说："我还不知道哪一个是假的．现在有一个普通的有两只盘的天平，但是没有砝码，只许称三次，我想你，萨拉杰克，一定能够发现哪一个是假的！"博士回答说："现在我用我称为'第二号秘诀'的万无一失的方法来解这个问题"．说完，他把钱币排成一列，每个钱币写上一个字母：K，R，Y，P，T，O，N，I，M，D，W，A．然后他称了三次，每次在每个盘上放四个钱币．他的朋友惊奇地注意到，每四个钱币的字母都组成一个词：

| | 左　盘 | 右　盘 |
|---|---|---|
| 第一次称 | MYTO | RAKI |
| 第二次称 | MODA | WINT |
| 第三次称 | WYKA | PION |

但是，过一分钟，博士愉快的脸孔从愤怒转为发黑．"可耻的骗子！"他大声地说："你想欺骗我！我，萨拉杰克博士，是所有数学科学的博士！但是这次你没有成功，因为我的'第二

号秘诀'揭穿了你！你的钱币中有两个是假的！"他的朋友带着懊悔的心情承认错误.

请研究，如果不是骗局(即的确只有一个假钱币——译者)，博士能不能找出假的钱币，并知道它比真的钱币重还是轻？如果所有的钱币都是真的，他是否也能发现？请指出，称的结果是怎样，才使博士发觉是骗局？最后，请确定，萨拉杰克的朋友能不能改动两个钱币的重量(其他钱币为正常重量)，使他能骗过博士与他的"第二号秘诀"？

**97．积木** 萨拉杰克博士告诉我，一百年前，在皇帝的命名日，曾经出现由25个军官组成的代表团：五个军团的每个军团派五名代表，每个军团的代表中都有上校、中校、少校、大尉与中尉．率领代表团的将军把他们排成正方形队伍，使每一横行、每一纵队都有上述所有的军衔、所有军团的代表．我问他，有没有挂勋章的军官？他说，共有五种勋章，每个军官都挂一个而且只挂一个勋章．我问：这五种勋章，每个军团的代表都有吗？每个军衔的代表都有吗？萨拉杰克博士深信不疑地说，正是如此，并且每一横行与每一纵队都有所有这五种勋章！

现在我们更进一步设想，把125个小正方体组成一个大正方体．事先给每个小正方体分别涂上一种颜色(白，蓝，绿，红，黄)，写上一个字母(A, B, C, D, E)，编上一个号码(1, 2, 3, 4, 5)．每种颜色涂在25个小正方体上，每个字母写在25个小正方体上，每个数字也一样．此外，还要使每一水平层的小正方体，都类似于上面所述的队伍的模型(即每一直行与每一横行都有所有的五种颜色，五个字母，五个数字．——译者)．并且要使大正方形任意一个面当作水平面，都符合上述要求．请问应该如何设计？

**98. 算盘** 一个算盘由十根水平放置的铁丝组成，每根铁丝上有一个算盘珠，设想这些算盘珠都按照同样一定的速度沿着铁丝来回运动，每碰到算盘的边框就回头．算盘珠的最初位置并不知道．算盘的垂直对称轴把算盘分成左右两半．假设算盘珠运动时，无论什么时候，算盘的右半部分不超过七个珠．萨拉杰克博士断言，右半部分永远不少于三个珠．他说得对吗？

**99. 街道洒水** 萨拉杰克博士的故乡有一辆供街道洒水用的洒水车，但是没有合适的汽车房．人们请博士在城市平面图（见图3）上，标出汽车房的最好位置，使汽车驶遍城市的所有街道回到汽车房的路径为最短．萨拉杰克选择自己的房子（图上用黑正方形表示）作汽车房．他作得对吗？

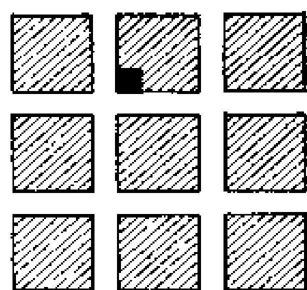


图 3

**100. 法国的城市** 萨拉杰克博士非常熟悉作战策略，1940年他熟悉了法国作战地区的地图．大概由于这个原因，产生了下面的题目：从沙龙到维特律的距离等于30公里（本题所有距离都是指直线距离），从维特律到苏蒙是80公里，从苏蒙到新岗坦是236公里，从新岗坦到里姆斯是86公里，从里姆斯到沙龙是40公里．请在这个封闭多边形中，计算从里姆斯到苏蒙的距离．没有地图就能回答这个问题，只有萨拉杰克！

# 七、没有解答的题目

这里的题目，有的解答已经知道，有的到现在还未解出．

这一章有容易的题目，也有难题. 但是不论解答其中哪些题目，都可以考验你的独立思考能力.

**加与减** 下图由 14 个"+"号与 14 个"−"号组成，它们是这样配置的：两个相同符号的下面总是"+"号，两个不同符号下面总是"−"号.

```
+ + − + − + +
 + − − − − +
  − + + + −
   − + + −
    − + −
     − −
      +
```

如果第一行有 $n$ 个符号，那末这样的三角形共有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个符号(上例中 $n$ 等于 7). 因为当 $n=3, 4, 7, 8, 11, 12$ 等时，$\frac{1}{2}n(n+1)$ 是偶数，所以我们可以问：对于这些数中的任意一个数 $n$，作出下面所画的三角形，使最上面的一行有 $n$ 个符号，"+"号与"−"号个数相同并按上述方法配置，这样的三角形都能作出吗？特别地，我们要问，当 $n=12$ 时，这个三角形能不能作？

```
− + + − − + − − + + + −
 − + − + − − + − + + −
  − − − − + − − − + −
   + + + − − + + − −
    + + − + − + − +
     + − − − − − −
      − + + + + +
       − + + + +
        − + + +
         − + +
          − +
           −
```

到现在还不知道一般解法. 这里我们举出 $n=12$ 及 $n=20$ 的解, 分别划掉每个三角形的第一行, 就得到 $n=11$ 与 $n=19$ 的解.

```
+ + + + − − + − − − + + + + − − − − − +
 + + + − + − − + + − + + + − + + + + −
  + + − − − + − + − − + + − − + + + −
   + − + + − − − − + − + − + − + + −
    − − + − + + + − − − − − − − + −
     + − − − + + − + + + + + + − −
      − + + − + − − + + + + + − +
       − + − − − + − + + + + − −
        − − + + − − − + + + − +
         + − + − + + − + + − −
          − − − − + − − + − +
           + + + − − + − − −
            + + − + − − + +
             + − − − + − +
              − + + − − −
               − + − + +
                − − − +
                 + + −
                  + −
                   −
```

**三角形中的三角形**　一个三角形的三边为 $a$, $b$, $c$, 另一个三角形的三边为 $a'$, $b'$, $c'$. 要使第一个三角形放置在第二个三角形的内部, 它的充分必要条件是数 $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ 之间有怎样的关系?

**圆周的分划**　在周长为 1 的圆周上确定一点 $P$, 从 $P$ 开始顺次截取长为无理数 $v$ 的弧, 得到分点 $P_1$, $P_2$, $\cdots$, $P_n$, $\cdots$,

这里任何一条弧 $P_kP_{k+1}$ 的长都等于 $v$. 点 $P$, $P_1$, …, $P_{n-1}$ 把圆周分成 $n$ 条弧. 证明：点 $P_n$ 是在其中最长的弧上.

**空间里的射线** 在空间里，从一个公共顶点出发的三条射线，形成三个平面角 $A$, $B$, $C$. 下面的不等式哪几个永远正确，哪几个不是永远正确？

(1) $A+B>C$,

(2) $\sin A+\sin B>\sin C$,

(3) $\sin\frac{1}{2}A+\sin\frac{1}{2}B>\sin\frac{1}{2}C$,

(4) $\sin^2 A+\sin^2 B>\sin^2 C$,

(5) $\sin^2\frac{1}{2}A+\sin^2\frac{1}{2}B>\sin^2\frac{1}{2}C$.

**无限大的棋盘** 在无限大的棋盘上，由 100 个正方形（棋盘方格）组成一个图形，使它的直径达到最小（图形的两点间的最大距离叫做直径）. 试求这个直径.

试求包含 100 个棋盘方格的最小的圆的半径.

**又一个算盘** 第 98 题中，假设给算盘珠从 1 到 10 编上号码. 在任何位置，它们在算盘底边上的射影，形成由数 1, 2, 3, …, 10 组成的一个排列. 设算盘珠如第 98 题所述那样在铁丝上来回运动，每个珠保持一定的速度，但是同其他珠的速度都不一样，此外，它们每秒的速度都是整数厘米. 能不能这样选择它们的速度，使算盘珠运动时，不论最初的位置怎样，都给出一切可能的排列（即数 1, 2, 3, …, 10 的排列）. 萨拉杰克博士肯定地说，他知道怎样安排每一个珠的速度，并使在所有其他排列未全部出现前，没有一个排列重复出现.

**比较重量** 有四个重量不同的物体. 有一架没有砝码的天平，可以比较任意两个物体的重量. 要求称五次能按轻重

排出这四个物体的次序，这个方法容易得到．证明：不存在这样的方法，称四次就能保证可以排出物体的轻重次序．

大家知道，10 个物体称 24 次可以排出它们的轻重次序，称的次数能不能减少？

**箱子里的盒子** 形状为长方体的箱子，长与宽分别是 186 mm 与 286 mm，里面可以放进 16 个大小完全相同的圆柱铁盒，它的高与箱子的高相等，圆柱的底在箱子的底上．但是，圆盒的直径略增大一点，就不能把十六个圆盒放进箱子了．试问这种圆盒的直径是多少？

**细菌** 萨拉杰克博士发现一种繁殖方式很奇怪的细菌：从最初的一个细菌分裂出一部分，成为一个独立的细菌，它比剩下的部分短，这样就出现两种长度不同的细菌．其中较大的一个又分裂出一部分，长度等于较短的细菌．这个过程一直到剩下部分比以前分裂出的每一部分短为止，然后再从这时刻菌落中任意一个最长的细菌开始分裂，分裂时，总是从这时刻的最长的细菌分裂出一部分，它的长度等于这时刻最短的细菌的长度．有了这个法则，就可以用数学式子把整个繁殖过程表达出来，不过要记住：每个时刻都只有一个细菌在分裂为两部分，还有，第一次分裂成的两部分是不相等的．

证明：任何时刻，菌落中不同长度的细菌不多于三种．如果第一次分裂出的部分的长度与原来的细菌长度的比是无理数，那末菌落中有时候有三种不同长度的细菌，有时候有两种不同长度的细菌，两种情况交替地反复出现．如果第一次分裂成两部分的比是有理数，那末总能出现这样的时刻，所有细菌的长度都相同，这时就不能再分裂了．

最后，试证：存在这样的分裂方式，每次分裂成的两部分的长度的比都相等，并且任何时候菌落中不同长度的细菌不

多于三种.

（提示：前面的分裂问题与两线段的可公度（通约）或不可公度有关，最后的分裂问题与线段的黄金分割有关.——译者）

**马戏团过来了** 孩子们在公路旁边的草地上游戏.突然，从树林伸展出来的公路上，出现骑着马的小丑，这是马戏团过来了….孩子们都跑向公路想去看小丑.站在离公路比较远的孩子已经赶不到了，但是至少也要尽可能近地看到他.所有的孩子都以同样的速度跑去，但是小丑走得更快.

现在要求：(1) 画一条分界线，把能赶得上小丑来到的孩子所在的草地与其他部分分开；(2) 确定站在这条分界线上的儿童跑的路径；(3) 确定不能及时赶到的孩子跑的路径；(4) 确定在小丑走过之前成功地跑到公路的儿童的路径.

谁想解这个题目，建议他先熟悉第 89 题.

**三个骑马牧人** 三个骑马牧人在一个很大的正方形牧场里看守一群牲畜.牧人们想把牧场分成三部分：(1) 每人负责看守 $\frac{1}{3}$ 的牧场；(2) 由牧人 $A$ 看守的牧场最远点到 $A$ 的哨所的距离，等于牧人 $B$ 看守的牧场最远点到 $B$ 的哨所的距离，也等于牧人 $C$ 看守的牧场最远点到 $C$ 的哨所的距离.此外，牧人们还希望：(3) 上述的最大距离达到最小；(4) 如果不论什么地方出了事情，出事地点所在的牧场的负责者到出事地点的距离，永远是三人到这出事地点的距离中的最小者.

证明：本题不可解，如果放弃一个或两个条件，那末就可以解.

**审问** 法官：这样，目击者看到了起火吗？就在起火之前，目击者在干什么？

目击者：我在沿着田界走.

法　官：你们村田界的走向是怎样的？

目击者：平行于公路与垂直于公路.

法　官：你散步是没有目的的吗？

目击者：不，我从公路走到田界，观察着邻近的田野，从来没有返回已经走过的田界再走出到公路上.

法　官：你走的路径有交叉吗？

目击者：没有，但是记得我在同一块油菜地近旁走了两次，第一次它在我的右手一边，这样，我能看到房子，而当第二次靠近它走的时候，它在我的左手一边．正在这时，我听见有人喊："起火了！"

法官吩咐人把目击者作为嫌疑犯逮捕起来．为什么？

**十二面体上的箭头**　设想在十二面体模型的每个面上画一个箭头→．证明：总可以找到两个相邻的面，它上面画的两个箭头所成的角大于 90°

# 解　　答

1．首先我们注意到：这个数列中的每一个奇数只可能在两个偶数之间出现．

事实上，假定这个数列的相邻两项$c$、$d$都是奇数，这时可能产生两种情况：

或者$\overline{cd}$（$\overline{cd}$表示两位数，十位数是$c$，个位数是$d$．——译者）是这数列中$c$、$d$前面某两项$a$、$b$的乘积，而$\overline{cd}$是奇数；

或者数$c$是这数列中，$c$、$d$前面的某两项$a$、$b$乘积的个位数字，且$c$是奇数．

这样一来，根据假定，这个数列相邻两项$c$、$d$都是奇数，就可推出它的前面某两项也是奇数．因此，从这数列相邻两项$c$、$d$都是奇数的假设，就可以推出这数列开头三个数中有两个奇数，事实上这是不成立的．

由此看出，这个数列的相邻两项永远不会都是奇数，因而数 9 不可能在这数列中出现．事实上，只有当两数（不同是奇数．——译者）乘积不小于 90 时才可能出现 9，而两个一位数乘积总是小于 90 的．

同样，数 7 也不可能出现，因为两个一位数的乘积如果是偶数而且含有数 7，它只能是这样一个两位数：$8\cdot 9=72$，可是这个数列中没有 9．

数 5 也不可能在这个数列中遇到，因为两个一位数的乘积是偶数而且含有数 5，只有$54=6\cdot 9$与$56=7\cdot 8$，可是这两者都含有这数列不出现的数（即 9 与 7．——译者）．

2. 任意一个 $n$ 位的自然数，可以表示成：

$$L=10^{n-1}a_n+10^{n-2}a_{n-1}+\cdots+10^2a_3+10a_2+a_1,$$

它的数字平方和是：

$$L_1=a_n^2+a_{n-1}^2+\cdots+a_3^2+a_2^2+a_1^2.$$

我们有：

$$L-L_1=(10^{n-1}-a_n)a_n+(10^{n-2}-a_{n-1})a_{n-1}+\cdots$$
$$+(10^3-a_4)a_4+(10^2-a_3)a_3$$
$$+(10-a_2)a_2-(a_1-1)a_1.$$

注意到

$$(a_1-1)a_1\leqslant 72.$$

这样，如果假设 $n\geqslant 3$，那末就有(因为 $a_n\neq 0$)：

$$(10^{n-1}-a_n)a_n\geqslant 99,$$

同时

$$(10^{i-1}-a_i)a_i\geqslant 0,\quad 当\ i=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,$$

因此

$$L>L_1.$$

如果所给的数 $L$ 至少有三位，我们用题中所述的方法作一个数字平方和的数列：

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ \cdots \tag{1}$$

根据上面最后一个不等式，可知这个数列(当这数列的各项至少是三位数时)是递减的. 由于各项都只能是自然数，那末从一个任意不小于三位数的数 $L$ 出发，经过若干步题目所述的过程，必然得出一个三位数. 因此，只要对最大的三位数验证题中的判断是否正确就可以了.

所以，我们可以假定所给的数 $L$ 是三位数，即 $n=3$. 这时 $a_3\neq 0$，我们得到：

$$L-L_1=(100-a_3)a_3+(10-a_2)a_2-(a_1-1)a_1$$
$$\geqslant 99-72=27,$$

或者 $$L_1 \leqslant L-27.$$

从这个不等式看出：数列(1)必定有某一项是这数列中最大的两位数．设这一项是

$$L_q = 10j+k.$$

因为数 $L_q$ 如果用 $10j+k$ 代替，数列

$$L_{q+1},\ L_{q+2},\ L_{q+3},\ \cdots$$

的项并不改变，那末只要证明我们的假设，对于 $10j+k$ 成立就可以了，其中

$$j \geqslant k \geqslant 0,\ j \geqslant 1.$$

如果 $L_q = 10j+k$，而 $j \geqslant k \geqslant 0$ 且 $j \geqslant 1$，那末 $L_{q+1}$ 是下面表中，关于式子 $j^2+k^2$ 的值的一个数：

| $j$ \ $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | | | | | | | | |
| 2 | 4 | 5 | 8 | | | | | | | |
| 3 | 9 | 10 | 13 | 18 | | | | | | |
| 4 | 16 | 17 | 20 | 25 | 32 | | | | | |
| 5 | 25 | 26 | 29 | 34 | 41 | 50 | | | | |
| 6 | 36 | 37 | 40 | 45 | 52 | 61 | 72 | | | |
| 7 | 49 | 50 | 53 | 58 | 65 | 74 | 85 | 98 | | |
| 8 | 64 | 65 | 68 | 73 | 80 | 89 | 100 | 113 | 128 | |
| 9 | 81 | 82 | 85 | 90 | 97 | 106 | 117 | 130 | 145 | 162 |

我们可以从这张表中删去数

$$1,\ 10,\ 100,$$

再删去题中已经举出的数

$$145,\ 42,\ 20,\ 4,\ 16,\ 37,\ 58,\ 89,$$

因为对于这些数，本题的命题是正确的．此外，我们还可以删去数

2, 40, 50, 52, 61, 73, 80, 81, 85, 90, 98, 130,

这些数同上面已删去的数或表中其他的数的差别，仅仅是数字排列不同，或者有没有最后一位的0. 这时，剩下只有28个数：

5, 8, 9, 13, 17, 18, 25, 26, 29, 32, 34, 36,
41, 45, 49, 53, 64, 65, 68, 72, 74, 82, 97, 106,
113, 117, 128, 162,

我们必须对这些数验证本题命题的正确性.

验证的结果写成下面一张表. 第一列是我们进行验证命题的数，第二列是由这些数形成的相应数列(1)的项①. 如果计算到一个对本命题正确的数，这一行的验证就停止.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 25, 29, 85 | 72 | 53, 34, 25 |
| 8 | 64, 52 | 74 | 65 |
| 9 | 81 | 82 | 68, 100 |
| 18 | 65, 61 | 106 | 37 |
| 32 | 13, 10 | 113 | 11, 2 |
| 36 | 45, 41, 17, 50 | 128 | 69, 117, 51, 26, 40 |
| 49 | 97, 130 | 162 | 41 |

上表的每一种情况，最后或者是得到数1，或者得到下列各数中的一个：

145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89,

以后，这些数就周期性地重复出现. 因此本题所述的命题得证.

**3.** 幂 $5^{\alpha}$, $4^{\beta}$, $3^{\gamma}$(这里 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 表示不超过5的非负整数)除以11所得的余数如下：

① 例如，表的第一行：$5^2=25$, $2^2+5^2=29$, $2^2+9^2=85$. 但是 $8^2+5^2=89$ 已在前面删掉，因为如果出现89，那末本题命题成立，这一行就此终止. ——译者

| 数 | 余　　数 | 数 | 余　　数 | 数 | 余　　数 |
|---|---|---|---|---|---|
| $5^0$ | 1 | $4^0$ | 1 | $3^0$ | 1 |
| $5^1$ | 5 | $4^1$ | 4 | $3^1$ | 3 |
| $5^2$ | 3 | $4^2$ | 5 | $3^2$ | 9 |
| $5^3$ | 4 | $4^3$ | 9 | $3^3$ | 5 |
| $5^4$ | 9 | $4^4$ | 3 | $3^4$ | 4 |
| $5^5$ | 1 | $4^5$ | 1 | $3^5$ | 1 |

数 $5^\alpha$、$4^\beta$、$3^\gamma$ 除以 11 所得的余数，分别用 $R(5^\alpha)$、$R(4^\beta)$、$R(3^\gamma)$ 表示．这些余数可以从上表中找到．其次，我们用 $k$、$m$、$n$ 表示三个任意非负整数．数 $5^{5k}$、$4^{5m}$、$3^{5n}$ 除以 11 所得的余数是 1①，所以，数 $5^{5k+\alpha}$、$4^{5m+\beta}$、$3^{5n+\gamma}$ 除以 11 所得的余数分别是 $R(5^\alpha)$②、$R(4^\beta)$、$R(3^\gamma)$．由此可知，只有当 $R(5^\alpha)+R(4^\beta)+R(3^\gamma)$ 能被 11 整除，式子

$$5^{5k+\alpha}+4^{5m+\beta}+3^{5n+\gamma} \tag{1}$$

才能被 11 整除．而当

$$k=m=n,\ \alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=0$$

时，这式子是能被 11 整除的．

我们可以举出另外 14 个，能被 11 整除的形如(1)的式子．这只要在上表三栏的每一栏选一个数，使它们的和能被 11 整除就可以了．

**4**．如果 $n$ 是奇数，式子 $a^n+b^n$ 能被 $a+b$ 整除，所以，数

$$3^{105}+4^{105}=(3^3)^{35}+(4^3)^{35}$$

---

① 由于 $5^5$ 除以 11 的余数是 1，所以可以设 $5^5=11t+1$，其中 $t$ 是整数．于是 $5^{5k}=(5^5)^k=(11t+1)^k$，按二项式定理展开，就可以看出 $(11t+1)^k$ 除以 11 的余数是 1．对于 $4^{5m}$ 与 $3^{5n}$ 除以 11 的余数，可以用同样的方法求出．——译者．

② $5^{5k+\alpha}=5^{5k}\cdot 5^\alpha=(11s+1)(11u+R(5^\alpha))$，展开后即可看出 $5^{5k+\alpha}$ 除以 11 的余数等于 $R(5^\alpha)$．式中 $s$，$u$ 都是整数．——译者

能被 $3^3+4^3=7\cdot 13$ 整除. 同理, 从等式

$$3^{105}+4^{105}=(3^5)^{21}+(4^5)^{21},$$

$$3^{105}+4^{105}=(3^7)^{15}+(4^7)^{15}$$

得出这个数能被 $3^5+4^5=7\cdot 181$ 与 $3^7+4^7=49\cdot 379$ 整除.

其次, 我们注意到①

$$4^3\equiv -1(\mathrm{mod}\ 5)$$

(这个式子表示 $4^3$ 除以 5 所得的余数是 $-1$). 由此推出

$$4^{105}\equiv(-1)^{35}(\mathrm{mod}\ 5),$$

所以
$$4^{105}\equiv -1(\mathrm{mod}\ 5).$$

同理, $3^2=-1(\mathrm{mod}\ 5)$, 由此推出

$$3^{104}\equiv(-1)^{52}(\mathrm{mod}\ 5),$$

所以
$$3^{104}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5),$$

因而
$$3^{105}\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5).$$

因为

$$4^{105}\equiv -1(\mathrm{mod}\ 5),\ 3^{105}\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5),$$

那末
$$3^{105}+4^{105}\equiv 2(\mathrm{mod}\ 5);$$

这表明, 数 $3^{105}+4^{105}$ 除以 5 所得的余数是 2.

同理,

$$4^3\equiv -2(\mathrm{mod}\ 11),\ \text{因而}\ 4^{15}\equiv -32(\mathrm{mod}\ 11).$$

但 $-32\equiv 1(\mathrm{mod}\ 11)$, 所以

$$4^{15}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 11),$$

最后得出结果:

$$4^{105}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 11).$$

同样, 我们确信

$$3^5\equiv 1(\mathrm{mod}\ 11),\ \text{因而}\ 3^{105}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 11).$$

---

① 以下各式的推导用到数论中的同余式, 但是都可以用上题译注所用的方法推出. ——译者

由此可知

$$3^{105}+4^{105}\equiv 2(\bmod 11),$$

这表明，数 $3^{105}+4^{105}$ 除以 11 所得的余数是 2.

**5**. 假设存在这样的自然数 $x$、$y$、$z$、$n$，$n\geqslant z$，而且 $x^n+y^n=z^n$. 不难看出，$x<z$，$y<z$，且 $x\neq y$（如果 $x=y$，就有 $2x^n=z^n$，那末 $z=\sqrt[n]{2}x$，这与 $x$，$z$ 是自然数矛盾. ——译者）. 由于对称性，可以假设 $x<y$，这时

$$\begin{aligned} z^n-y^n&=(z-y)(z^{n-1}+yz^{n-2}+\cdots+y^{n-1})\\ &\geqslant 1\cdot nx^{n-1}>x^n, \end{aligned}$$

这同我们的假设 $x^n+y^n=z^n$ 矛盾. 因此，题目中所述的判断是正确的.

**6**. 可以举出许多列数 $x_1$，$x_2$，…，$x_{10}$ 满足题目的条件. 下面是其中的两列数：

0.95, 0.05, 0.34, 0.74, 0.58, 0.17, 0.45, 0.87, 0.26, 0.66;

0.06, 0.55, 0.77, 0.39, 0.96, 0.28, 0.64, 0.13, 0.88, 0.48.

第一列数是这样配置在区间[0, 1]的各部分中的：

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.95 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0.05 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.34 | | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 0.74 | | | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 |
| 0.58 | | | | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| 0.17 | | | | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 0.45 | | | | | | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 0.87 | | | | | | | 7 | 8 | 9 |
| 0.26 | | | | | | | | 3 | 3 |
| 0.66 | | | | | | | | | 7 |

表的上面一行表示区间[0, 1]所分成的部分的个数，表的第一列就是数 $x_1$, $x_2$, …, $x_{10}$. 在每一行与每一列的交叉处，可以找到已知数在已知分划下，所在区间部分的号码. 因为这张表的每一列没有两个数相同，所以这是满足题目条件的.

**7**. 一般解法还不知道. 满足上题条件的14个数($n=14$)是存在的，如

0.06, 0.55, 0.77, 0.39, 0.96, 0.28, 0.64,

0.13, 0.88, 0.48, 0.19, 0.71, 0.35, 0.82.

(这列数是由上题所举出的第二列10个数，添上四个数0.19, 0.71, 0.35, 0.82得到的)

这一列数在区间[0, 1]内的配置情况如下:

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.06 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.55 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 |
| 0.77 | | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 |
| 0.39 | | | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| 0.96 | | | | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 0.28 | | | | | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 0.64 | | | | | | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 |
| 0.13 | | | | | | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 0.88 | | | | | | | | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 0.48 | | | | | | | | | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| 0.19 | | | | | | | | | | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 0.71 | | | | | | | | | | | 9 | 10 | 10 |
| 0.35 | | | | | | | | | | | | 5 | 5 |
| 0.82 | | | | | | | | | | | | | 12 |

因为数0.35与0.39在 $\frac{5}{15}=0.33\cdots$ 与 $\frac{6}{15}=0.4$ 之间，所以上面这组数，不可能增加到15个并且满足题目的条件.

有趣的是，这组数可以重新排列，而题目的条件仍旧能够

满足，例如：

0.19, 0.96, 0.55, 0.39, 0.77, 0.06, 0.64,

0.28, 0.88, 0.48, 0.13, 0.71, 0.35, 0.82.

8. 存在 90 种排列. 但是，如果我们认为通过字母调换所得的排列，同原排列没有本质上的区别，那末只能得到 $90 \div 6 = 15$ 种不同的排列，这是因为字母 $a$, $b$, $c$ 构成的全排列数是 $3! = 6$:

$$abc, \ acb, \ bac, \ bca, \ cab, \ cba.$$

我们从这十五组不同排列的每一组里，选出这样一个排列，使它的第一个字母是 $a$，第二个异于 $a$ 的字母是 $b$，第三个异于 $a$、$b$ 的字母是 $c$:

(1) *aabbcc*(*aabbcc*——1)
(2) *aabcbc*(*ababcc*——4)
(3) *aabccb*(*abbacc*——7)
(4) *ababcc*(*aabcbc*——2)*
(5) *abacbc*(*abacbc*——5)
(6) *abaccb*(*abbcac*——8)
(7) *abbacc*(*aabccb*——3)*
(8) *abbcac*(*abaccb*——6)*
(9) *abbcca*(*abbcca*——9)
(10) *abcabc*(*abcabc*——10)
(11) *abcacb*(*abcbac*——12)
(12) *abcbac*(*abcacb*——11)*
(13) *abcbca*(*abcbca*——13)
(14) *abccab*(*abccab*——14)
(15) *abccba*(*abccba*——15)

把上面每一个排列的字母倒过来得到一个排列组，每组确定一个排列“代表”，这个排列“代表”与该排列组号码，一起分别写在相应原排列后面的括号中. 排列“代表”是这样的一个排列：第一个字母是 $a$，第二个异于 $a$ 的字母是 $b$，第三个异于 $a$、$b$ 的字母是 $c$.（例如：把 (2) *aabcbc* 的字母倒过来，就是 *cbcbaa*，再把第一个字母 $c$ 以及以后的 $c$ 都换成 $a$，第二个异于 $a$ 的字母已经是 $b$，因而不变，再把 $a$ 换成 $c$，即得括号中的排列“代表” *ababcc*，这属于第四排列组. ——译者）

把字母的排列颠倒过来，可以明显地看出，第4，7，8与12组(用星号*标出)分别同第2，3，6与11组没有本质的区别．因此，有本质区别的排列组总共有11个，其中有7个组，每组含6种排列，另外4个组，每组含12种排列．

**9**．我们可以取

$$A:B:C=\sqrt[3]{\frac{p}{r}}:\sqrt[3]{\frac{q}{p}}:\sqrt[3]{\frac{r}{q}}. \qquad (1)$$

事实上，容易证明

$$pqr=1,$$

由这个等式，我们得出：

$$A:B=\sqrt[3]{\frac{p^2}{qr}}=p, \quad B:C=\sqrt[3]{\frac{q^2}{rp}}=q,$$

$$C:A=\sqrt[3]{\frac{r^2}{pq}}=r.$$

再次利用等式 $pqr=1$，我们可以从上面比例式得出另外一个也具有所要求的性质的比例式：

$$A:B:C=\sqrt[3]{p^2q}:\sqrt[3]{q^2r}:\sqrt[3]{r^2p}.$$

(比例式(1)右边各项都乘以 $\sqrt[3]{pqr}$ 即得．——译者)

**10**．用 $w$ 表示待证的对称性式子．容易看出：

$$w=\begin{cases}2|x-y|+2x+2y & 当\ |x-y|+x+y-2z\geqslant 0,\\ 4z & 当\ |x-y|+x+y-2z\leqslant 0.\end{cases}$$

再考虑 $x-y\geqslant 0$ 与 $x-y\leqslant 0$ 两种情况，我们可以得出结论：

$$w=\begin{cases}4x & 当\ x-z\geqslant 0，而且\ x-y\geqslant 0,\\ 4y & 当\ y-x\geqslant 0，而且\ y-z\geqslant 0,\\ 4z & 当\ z-y\geqslant 0，而且\ z-x\geqslant 0.\end{cases}$$

即：$w=4\max\{x, y, z\}$，由此就可以直接得出原式是对称式．

**11**. 当 $x>0$，方程左边随 $x$ 增加而增加，容易看出，当 $x=1.5$ 时，方程左边的值小于 10，而当 $x=1.6$ 时，则大于 10. 因而方程的正根在区间(1.5, 1.6)之内. 如果这个根不是无理数，那末它可以写成既约分数 $\frac{p}{q}$. 这时，原方程就变成下面的形式：$p^5+pq^4=10q^5$，由此得出 $p$ 是 10 的因数，所以 $p$ 等于 1, 2, 5, 10 中的一个数. 但是可以立即看出，分子是 1, 2, 5, 10 的分数，没有一个在区间(1.5, 1.6)之内. 这个矛盾，证明了原方程的正根必定是无理数.

**12**. 首先我们注意下面的预备定理：如果 $p, q, x, y$ 是正数，那末由不等式

$$\frac{1}{p}>\frac{1}{q}, \quad x>y$$

可以导出不等式

$$\frac{x}{x+p}>\frac{y}{y+q}.$$

事实上，根据条件

$$\frac{1}{p}>\frac{1}{q}>0 \text{ 与 } x>y>0,$$

得出
$$\frac{x}{p}>\frac{y}{q}>0,$$

所以
$$\frac{p}{x}<\frac{q}{y}.$$

在这种情况下，

$$0<1+\frac{p}{x}<1+\frac{q}{y}, \text{ 或者 } 0<\frac{x+p}{x}<\frac{y+q}{y},$$

所以
$$\frac{x}{x+p}>\frac{y}{y+q}.$$

于是预备定理得证.

因为 $A, B, C, a, b, c, r$ 都是正数，那末

$$\frac{1}{c+r}>\frac{1}{C+c+b+r}, \quad A+a+B+b>A+a,$$

根据上面证明过的预备定理推出

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r}>\frac{A+a}{C+c+A+a+b+r}. \qquad (1)$$

同理可得：

$$\frac{1}{a+r}>\frac{1}{A+a+b+r}, \quad B+b+C+c>C+c,$$

根据预备定理推出

$$\frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r}>\frac{C+c}{C+c+A+a+b+r}. \qquad (2)$$

把不等式(1)与(2)相加，就得到所要证明的不等式.

**13.** (1) 假定得到的图形含有封闭多边形 $ABCDE\cdots MN$.

此外，再假定 $AN<AB$，也就是说，点 $N$ 是距点 $A$ 最近的点，因而用线段 $AN$ 连接. 这时必定有 $AB<BC$(否则的话，$A$ 不是距 $B$ 最近的点，而由 $AN<AB$ 看出，$B$ 也不是距 $A$ 最近的点，那末就不应该有连线 $AB$，这个矛盾证明了不等式 $AB<BC$ 成立.——译者). 但是点 $B$ 与 $C$ 连成线段，所以 $BC<CD$. 同理可得：$CD<DE<\cdots<MN<NA$，即 $AB<NA$，这与我们的假设 $AN<AB$ 矛盾.

(2) 假定形成的图形含有两条相交的线段 $AB$ 与 $CD$(图 4).

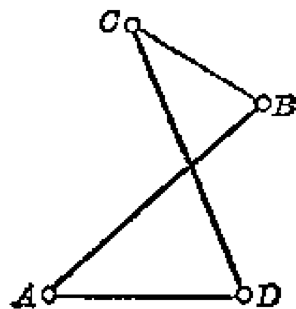


图 4

我们假设，$A$、$B$ 两点之所以连成线段，是因为点 $B$ 是

距点 $A$ 最近的点；同样地我们假设点 $D$ 是距点 $C$ 最近的点①. 这时有

$$AB<AD,\ CD<CB,\ \text{因此}\ AB+CD<AD+CB,$$

但是凸四边形两条对角线的和大于两条对边的和，于是导致矛盾.

这样，我们证明了命题的第二部分.

**14.** 为简单起见，我们引进下列记号：

$$r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_{k-1}^2},\ a=x_k,\ b=x_{k+1}.$$

我们证明，如果 $a<b$，那末按如下顺序

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-1},\ b,\ a,\ x_{k+2},\ \cdots,\ x_n$$

得出的角，小于按原来的顺序

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-1},\ a,\ b,\ x_{k+2},\ \cdots,\ x_n$$

得出的角.

为此，只要对这两种顺序比较角 $P_{k-1}OP_{k+1}$ 就可以了. 图 5 中，角 $P'_{k+1}OP_{k-1}$ 对应原来的顺序，角 $P''_{k+1}OP_{k-1}$ 对应改变后的顺序. 因为 $OP'_{k+1}=OP''_{k+1}(=\sqrt{r+a^2+b^2})$，那末就要证明不等式 $P''_{k+1}R''<P'_{k+1}R'$，即不等式

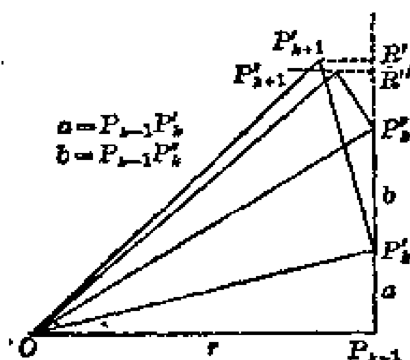



图 5

① $A$、$B$ 连成线段也可能是由于 $A$ 是距 $B$ 最近的点，$C$、$D$ 连成线段也可能是由于 $C$ 是距 $D$ 最近的点. 对于各种可能组合情况，都可以导出类似的矛盾不等式，不过有时要用到连线 $AC$ 与 $BD$. ——译者

$$\frac{ab}{\sqrt{b^2+r^2}}<\frac{ab}{\sqrt{a^2+r^2}}①,$$

从假设 $a<b$ 即可推出这个不等式.

**15**. 如果三角形 $ABC$ 的三边是 $a$、$b$、$c$,已知$\angle A=60°$,那末 $\angle B+\angle C=120°$,六个这样的三角形可以拼成一个花环,它的外面轮廓是边长为 $a$ 的正六边形,里面有一个边长为 $b-c$ 的正六边形(图 6). 计算这两个六边形的面积,就得到题中的公式(1).

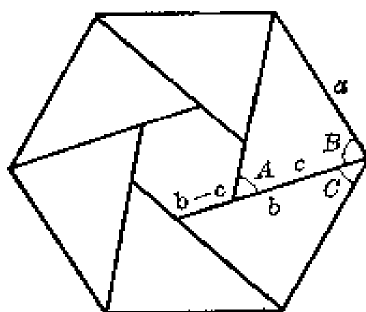



图 6

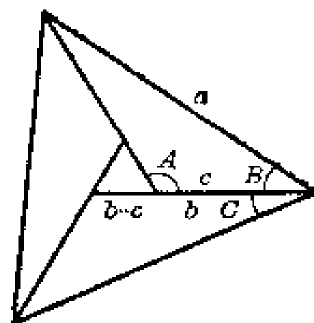



图 7

如果三角形中已知 $\angle A=120°$, 那末 $\angle B+\angle C=60°$, 三个这样的三角形可以拼成一个三角形花环(图 7). 利用类似上面的方法,可以得出公式(2).

**16**. 设三角形 $A_1A_2A_3$ 的周长是 $2p$, 画一条直线与这三角形的边 $A_1A_2$、$A_3A_1$ 分别相交于 $C_3$、$C_2$,并分三角形的周长

---

① 从 $\triangle OP_{k-1}P'_k \backsim \triangle P'_kR'P'_{k+1}$ 得到

$$\frac{R'P'_{k+1}}{P'_kP_{k-1}}=\frac{P'_kP'_{k+1}}{OP'_k},$$

即

$$\frac{R'P'_{k+1}}{a}=\frac{b}{\sqrt{a^2+r^2}},$$

所以 $R'P'_{k+1}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+r^2}}$. 同理, $P''_{k+1}R''=\frac{ab}{\sqrt{b^2+r^2}}$. ——译者

为相等的两部分(图 8)．把直线 $A_1A_2$ 与 $A_1A_3$ 作为坐标轴(这是斜角坐标系的坐标轴.——译者)，设直线$C_3C_2$经过点 $C_3(q+\lambda,\ 0)$ 与 $C_2(0,\ q-\lambda)$，这里 $q=\frac{1}{2}p$，$\lambda$ 是任意数．这样选择 $C_2$、$C_3$ 的坐标，所得的直线 $C_3C_2$ 当然平分三角形 $A_1A_2A_3$ 的周长(因为 $A_1C_2+A_1C_3=(q-\lambda)+(q+\lambda)=2q=p=$ 三角形 $A_1A_2A_3$ 周长的一半．——译者)．

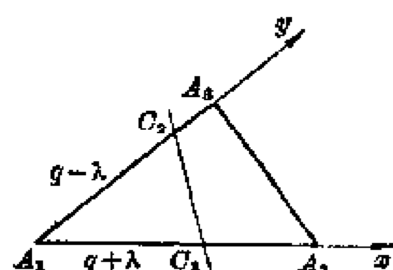


图 8

设三角形三边的长分别为 $d_1$、$d_2$、$d_3$．根据条件，直线 $C_3C_2$ 与边 $A_1A_2$、$A_3A_1$ 相交，而不是与它们的延长线相交，因而我们得到：

$$0\leqslant q+\lambda\leqslant d_3,$$
$$0\leqslant q-\lambda\leqslant d_2,$$

因此

$$\left.\begin{array}{l}-q\leqslant\lambda\leqslant d_3-q,\\ q-d_2\leqslant\lambda\leqslant q.\end{array}\right\}\qquad(1)$$

很明显，从不等式 $d_1<d_2+d_3$ 可以得出不等式 $2d_1<2p$，即 $d_1<p$．同理，$d_2<p$，$d_3<p$．还可以看出，从不等式 $p>d_3$ 能推出 $q>d_3-q$．同理从不等式 $p>d_2$ 可以得到 $q-d_2>-q$．因此，不等式组(1)可以用下面的二重不等式代替：

$$q-d_2\leqslant\lambda\leqslant d_3-q.\qquad(2)$$

由这个不等式可以确定参数 $\lambda$ 的允许值．直线 $C_3C_2$ 的方程具有下面的形式：

$$(q-\lambda)x+(q+\lambda)y-q^2+\lambda^2=0.\qquad(3)$$

(因为直线 $C_2C_3$ 在坐标轴上的截距是 $q+\lambda$ 与 $q-\lambda$，可得直

线 $C_2C_3$ 的截距式方程：$\frac{x}{q+\lambda}+\frac{y}{q-\lambda}=1$，由此即可化为方程(3)．——译者）

如果我们画出三角形 $A_1A_2A_3$，并量得它的周长 $2p$，然后用参数 $\lambda$ 的不同值逐个代入方程(3)．每个 $\lambda$ 值都确定两点 $C_3$、$C_2$，最后，画出直线 $C_3C_2$，那末我们可以看出(图 9)，所有这样的直线都跟同一条曲线相切，这条曲线就是直线族(3)的包络．不难算出，这条曲线的方程是①

$$4xy=(p-x-y)^2. \tag{4}$$

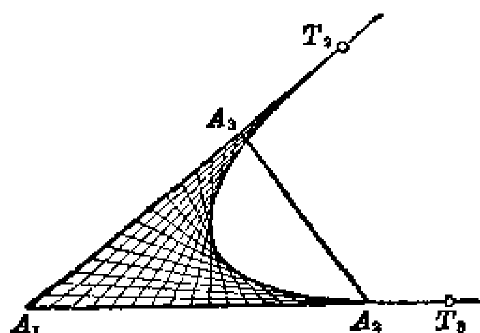



图 9

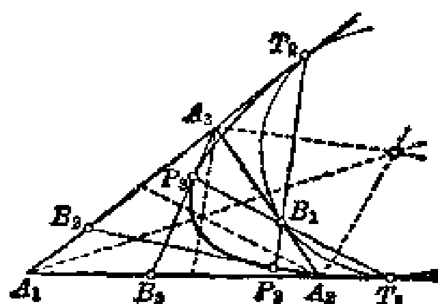



图 10

曲线(4)是抛物线，这是因为它是二次曲线，并且同任意直线 $y=x+k$ 只有一个公共点(不论 $k$ 取什么值)．因此，抛物线(4)的对称轴平行于直线 $y=x$，即平行于角 $A_1$ 的平分

---

① 求直线族(3)的包络通常要用到高等数学：由方程(3)对参数 $\lambda$ 求导：

$$-x+y+2\lambda=0,$$

得

$$\lambda=\frac{1}{2}(x-y),$$

代入(3)式

$$\left(q-\frac{x-y}{2}\right)x+\left(q+\frac{x-y}{2}\right)y-q^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=0,$$

化简，并注意到 $q=\frac{1}{2}p$，即可得到

$$4xy=(p-x-y)^2.$$

——译者

线．用 $x=0$ 与 $y=0$ 分别代入方程(4)，我们看出，抛物线与角 $A_1$ 的边相切于点 $T_3(p,\ 0)$ 与 $T_2(0,\ p)$，如图 10 所示．而三角形 $A_1T_2T_3$ 是等腰三角形，所以角 $A_1$ 的平分线垂直且平分线段 $T_2T_3$，也就是说，角 $A_1$ 的平分线就是抛物线(4)的对称轴．

现在，我们把由不等式(2)所确定的参数 $\lambda$ 的边界值依次代入(3)，然后与方程(4)联立，得到：当 $\lambda=q-d_2$ 时，直线 $A_3B_3$ 与抛物线(4)切于点 $P_3$，它的坐标是

$$x=\frac{(p-d_2)^2}{p},\quad y=\frac{d_2^2}{p};$$

当 $\lambda=d_3-q$，直线 $A_2B_2$ 与抛物线(4)切于点 $P_2$，它的坐标是

$$x=\frac{d_3^2}{p},\quad y=\frac{(p-d_3)^2}{p},$$

并且 $A_1B_3=p-d_2$，$B_3A_2=p-d_1$，$A_1B_2=p-d_3$，$B_2A_3=p-d_1$．如果点 $B_1$ 把边 $A_2A_3$ 分为 $p-d_3$ 与 $p-d_2$ 两线段，那末不难验证，点 $T_2$、$B_1$、$P_2$ 在一直线上．同理，点 $T_3$，$B_1$，$P_3$ 在一直线上．还可以看出，直线 $T_2B_1$ 与 $T_3B_1$ 分别平行于角 $A_3$ 与角 $A_2$ 的平分线．最后，还可以得出，过点 $B_1$、$T_2$、$T_3$ 的圆同直线 $A_2A_3$、$A_3T_2$、$A_2T_3$ 相切．

这样，每一条同三角形的边 $A_1A_2$ 与 $A_3A_1$ 相交，且平分三角形周长的直线，必定与抛物线(4)的弧相切，反过来也对．

对三角形的每一个角都可以进行同样的讨论．这样，我们得到抛物线的三条弧，它同三条公切线线段组成一个曲边三角形 $T$(图 11)．

现在，我们可以作一个简要的结论：

(1) 经过在三角形 $A_1A_2A_3$ 内，但在曲边三角形 $T$ 外的每一点 $P$，可以作一条并且只可以作一条直线，平分已知三角

形的周长．这条直线就是经过点 $P$ 向三条抛物线弧中的一条所引的切线，如图 11 所示．

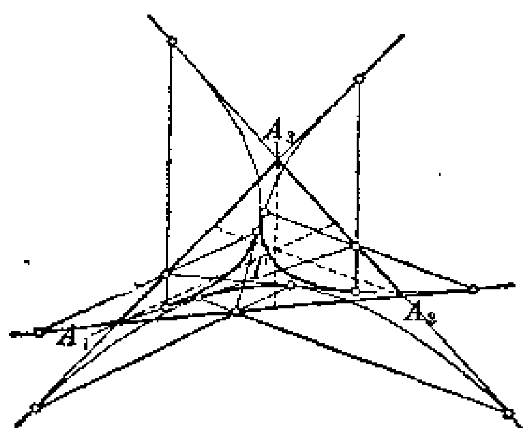



图 11

(2) 经过曲边三角形 $T$ 内的每一点 $P$，可以作并且只可以作三条直线平分三角形 $A_1A_2A_3$ 的周长．这三条直线就是经过点 $P$ 向抛物线的弧所引的三条切线，如图 11 所示．

(3) 如果在平面内给定直线的方向，那末总可以按这个方向，画一条直线平分三角形的周长．为此，只要按给定方向，向已知抛物线的一条弧引切线即可．

(4) 如果给定两条直线的方向，那末总可以分别按这两个方向画两条直线，使每条直线都平分三角形的周长．两条直线的交点 $Q$，必在曲边三角形 $T$ 的内部，因此，如果两条直线都平分已知三角形的周长，那末过它们的交点 $Q$，总可以画第三条直线，平分这个三角形的周长．

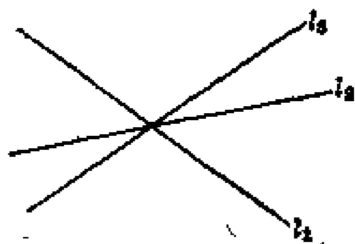



图 12

(5) 如果已知相交于一点的三条直线 $l_1$、$l_2$、$l_3$（图 12），设想它们是用墨水画在玻璃纸上，那末总可以把它们放在平面上，使每一条直线都平分三角形 $A_1A_2A_3$ 的周长．

问题的答案是出乎意料之外的，具有所要求的性质的点，根本不需要去找，因为题中所说的每一个点 $Q$ 都具有这些性质.

如果所给的不是三角形，而是另外的图形，例如四边形，那末也可以用类似的方法解. 当然，这时曲边三角形 $T$ 将改成由抛物线的四条弧围成的区域. 但是，与前面一样，经过四边形内任意一点，可以作一条或三条直线平分周长. 如果图形有对称中心，那末，经过中心点可以画三条平分周长的直线，它组成的区域，将变为一点，经过这点的每条直线都平分周长.

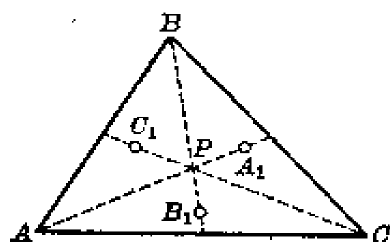


图 13

**17**. 首先，我们注意到，任意三点的重心，同时也是以这三点为顶点的三角形的重心. 把三角形 $ABC$ 分为三个三角形 $BCP$, $CAP$ 与 $ABP$(图 13)，每个三角形的质量集中在它的重心 $A_1$, $B_1$, $C_1$. 这三个三角形的面积相等(为什么?)，所以它们的质量相等，利用上述性质，得出点 $P$ 是三点 $A_1$, $B_1$, $C_1$ 的重心.

**18**. 要把一个三角形分成几个三角形，使所成的图形在每一个顶点处聚集着相同数目的边，我们可以利用各面是三角形的正多面体，即正四面体，正八面体和正十二面体，这样的正多面体只有这几种.

我们在正四面体内靠近一个面的中心取一点，从这点出发，把四面体的各条棱投影到平面内，就得到图 14 所示的图形，它由三个三角形组成，每个三角形对应四面体的一个面，第四个面投影后变成大三角形 $ABC$. 图形的每个顶点处聚集着三条边，因为四面体的每个顶点处聚集着三条棱.

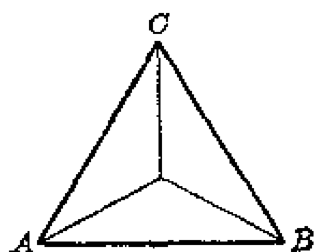
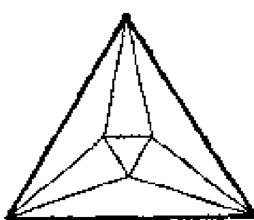
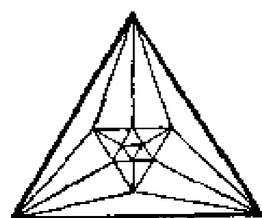


图 14


图 15


图 16

同理，利用中心投影，可以从一个正八面体得出一个由七个三角形组成的图形，在每个顶点处聚集着四条边（图 15）。从一个正二十面体可以得出一个由十九个三角形组成的图形，在每个顶点处聚集着五条边（图 16）。

除了图 14～16 所画的图形外，适合题目条件的其他图形是不存在的，因为如果还存在这样的图形，它对应的正多面体就与上述三个不同，而这样的正多面体是不存在的。

**19**. 题目所提问题的答案是肯定的。因为经过已知 $3n$ 个点中任意两点的直线只有有限条，那末我们可以画一条直线既不平行于上述任意一条直线，也不经过已知 $3n$ 点中的任意一点，并且使所有这些点都在这条直线的一侧。如果我们把这条直线在平面内平行移动，那末原来都在直线一侧的 $3n$ 个点将依次地减少一个，两个，三个，…，$3n$ 个。减少三个，六个，…，$3n-3$ 个点时的各条直线把平面划分成许多长带，每一条长带里只有三个点，也就是只有一个三角形。

用完全相同的方法，可以作既不相交又不是一个包含另一个的四边形、五边形等。

**20**. 题目所提问题的回答是肯定的。网的每个结点可以放上正号或负号，使它满足题目的条件。

首先指出，如果本题有解，那末可能发生两种情况：

(1) 每个等边三角形的三个顶点都是正号（图 17）；

(2) 每个三角形有两个顶点是负号，一个顶点是正号(图 18)．

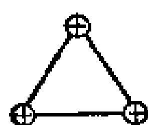


图 17

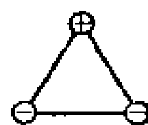


图 18

第一种情况已被排除．

对图 18 的那种三角形，把符号相同的顶点连在一起，可以作成一条无限长的带(图 19)．

我们看到，在这条带的两边的顶点符号，是轮流地出现一个正、两个负．

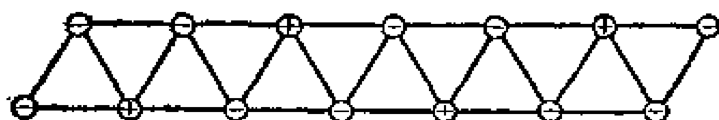


图 19

由此可见，把这样的带(图 19)用适当的方式拼接，就可以用符合题目条件的等边三角形的网遮盖整个平面(图 20)．从这个网的构成方法可以知道：网的结点的正负号配置方式是唯一的．

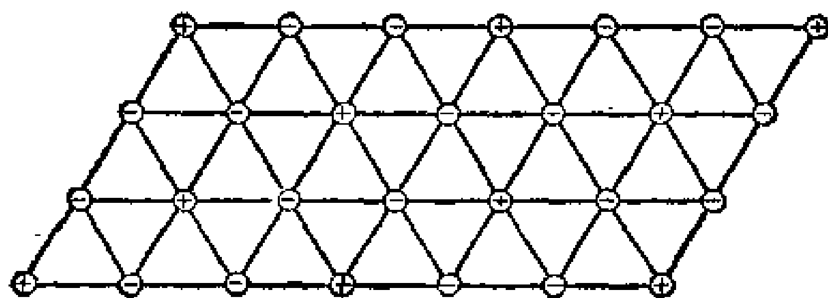


图 20

**21**. 假设命题不成立，即可以用这样的三角形网遮盖平面，它的每个结点 $W$ 处聚集着五个三角形(图 21)．这时，在顶点 $W$ 处的五个角中，任意四个角的和将大于 $180°$(如果存在四个角，它们的和不大于 $180°$，那末第五个角将大于或等于 $180°$，这显然是不可能的．——译者)．

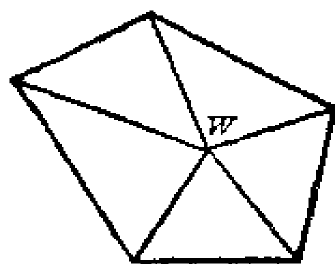



图 21

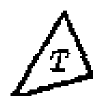



图 22

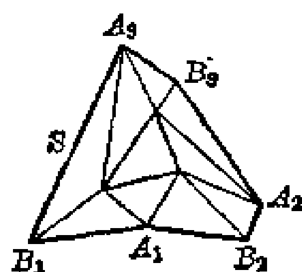



图 23

在这个网中任意取一个三角形 $T$(图 22)，网中与三角形 $T$ 至少有一个公共点的三角形连同三角形 $T$，形成一个六边形 $S$(图 23)．在它的三个顶点 $A_1$，$A_2$，$A_3$ 处，各聚集着三个三角形；在另外三个顶点 $B_1$，$B_2$，$B_3$ 处，各聚集着两个三角形．现在，我们在六边形的顶点 $A_1$，$A_2$，$A_3$ 处各贴附上两个三角形(图 24)，在顶点 $B_1$，$B_2$，$B_3$ 处，除刚刚贴附上的三角形外，再各贴附上一个三角形(图 25)．这样，整个图形就是

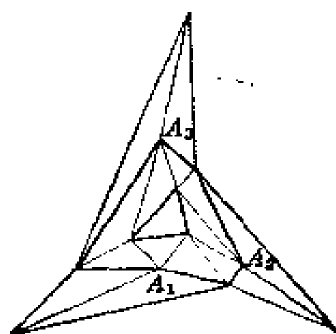



图 24

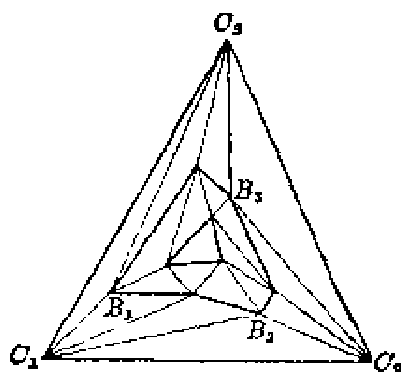



图 25

由六边形 $S$ 与贴附上的外围三角形，组成一个大三角形 $C_1C_2C_3$（图 25）．这个大三角形的每个顶点处聚集着四个三角形（都属于三角形网），顶点处四个角的和小于 180°，这与开头所得的结论矛盾．

由这个矛盾导出结论：题中所述的网是不存在的．

**22**．设 $OA_0=a$，$OB_0=b$（图 26）．根据已知条件有 $b=aq$，这里

$$q=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

（从条件 $a:b=b:(a-b)$ 可解得 $b=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)a$，即 $q=\frac{b}{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$．——译者）．第一次剪去的正方形边长等于 $aq$，第二次剪去的正方形的边长等于 $aq^2$，第三次等于 $aq^3$ 等等．

图 26

设 $OA_n=x_n$，$A_nB_n=y_n(n=1, 2, \cdots)$．线段 $OA_1=x_1$，$OA_3=x_3$，$OA_5=x_5$，$\cdots$ 形成递增序列，而线段 $OA_2=x_2$，$OA_4=x_4$，$OA_6=x_6$，$\cdots$ 形成递减序列．这两个序列收敛于同一

极限，它是某一点 $A$ 的横坐标．因为 $OA_1=aq$，$A_1A_3=aq^5$，$A_3A_5=aq^9$，…，那末

$$x=\lim x_{2n+1}=aq+aq^5+aq^9+\cdots=\frac{aq}{1-q^4}.$$

同理，线段 $y_1=A_1B_1$，$y_3=A_3B_3$，$y_5=A_5B_5$，…形成递减序列，而线段 $y_2=A_2B_2$，$y_4=A_4B_4$，$y_6=A_6B_6$，…形成递增序列．这两个序列也收敛于同一极限，它就是点 $A$ 的纵坐标．我们有

$$y=\lim y_{2n}=aq^4+aq^8+aq^{12}+\cdots=\frac{aq^4}{1-q^4}.$$

因此，无限次剪去正方形，只剩下一点 $A$，它的坐标是

$$x=\frac{aq}{1-q^4},\quad y=\frac{aq^4}{1-q^4}.$$

这一点就是互相垂直的直线 $A_0B_0$ 与 $A_1O$ 的交点．

**23**．小四边形是平行四边形(图 27)，因为它的两组对边分别平行于原四边形的两条对角线．这两条对角线把大四边形分成四个三角形，把小四边形分成四个平行四边形，其中每个平行四边形的面积，是它所在的小三角形面积的一半．所以小四边形的面积等于大四边形面积的一半．对于非凸四边形，也有同样的性质(图 28)．但是这时的证明方法不同，原来利用相应的三角形或平行四边形面积相加，现在要改为利用平行四边形面积相减．

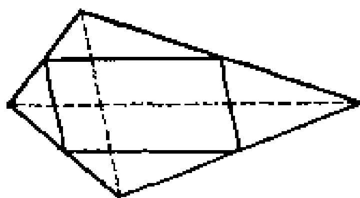


图 27

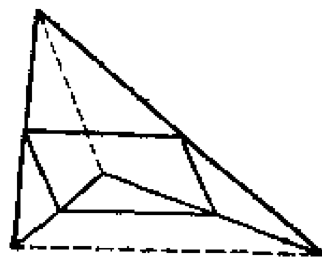


图 28

**24**. 用题目条件所要求的方法，给网的结点标上字母，是不可能的.

要证明这一点，我们假设与此相反，即网的结点可以用题目条件所要求的方法标上字母，现在来研究网的任意一行. 这一行必须有三个相邻的结点，分别用三个字母表示，例如 $a$、$b$、$c$(如果不是这样，这一行最多就只有两个不同字母，这与题目条件矛盾).

再看下面的一行(见图 29 中间). 如果结点字母标法符合题目条件，那末在结点 $a$、$b$、$c$ 的下面，必须分别对应着结点 $c$、$d$、$a$. 这时，再下一行的结点必须分别对应的是 $a$、$b$、$c$ (图 29 右).

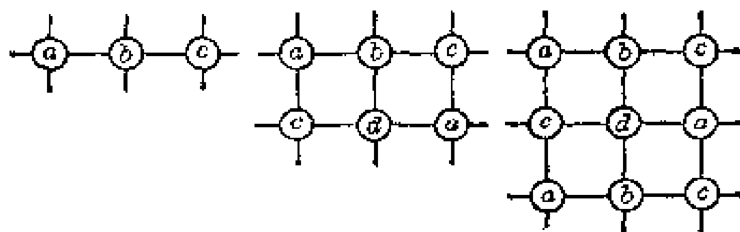



图 29

继续这个讨论过程，我们看到，网的三个直列的每一列，都只有两个不同的字母，如第一列只有字母 $a$、$c$，第二列只有字母 $b$、$d$，第三列只有字母 $c$、$a$.

这样，在网的每一行与每一列上的结点，不可能有四个不同字母，因而不存在题目所述的那种字母标法.

**25**. 错误在于没有注意到：无穷数列的项的平均值与项的排列顺序有关(例如，无穷数列 1, 0, 1, 0, 1, 0, … 的项的平均值是 $\frac{1}{2}$，但是把数列的项的顺序改变为：1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, …，项的平均值就是 0

了)① 错误等式 $14=15$ 的得出，正是因为用不同顺序排列七边形内角组成的无穷序列(这些七边形铺满平面)．

**26**．假设 $n$ 个点中，任意三点不在一直线上，以它们为顶点可以作一个封闭 $n$ 边形．设有 $n+1$ 个点，其中任意三点不在一直线上．在这 $n+1$ 个点中，必定有一点(例如 $P$)，可以用一条直线把它同其他点隔开．设 $W_n$ 是根据假设满足题目条件的 $n$ 边形，它的顶点是异于 $P$ 的点．

如果从点 $P$ 看去，多边形 $W_n$ 中至少有一条边能全部看得见，那末把这条边的端点分别同点 $P$ 连成线段，用这两条线段代替这条边，就得到一个符合题目条件的 $n+1$ 边形 $W_{n+1}$．利用数学归纳法，就能证明题目提出的问题的答案是肯定的．但是，从点 $P$ 看出，多边形 $W_n$ 是否至少有一条边能全部看得见呢？我们任意取多边形 $W_n$ 的一条边，例如 $A_iA_{i+1}$ (图 30)．如果从点 $P$ 看去，这条边不能全部看得见，也就是说，它或者全部地或者部分地被多边形 $W_n$ 的其他的边遮住．经过 $A_iA_{i+1}$ 作直线，这条直线的一侧有点 $P$，另一侧可能有多边形的边．把完全在另一侧的多边形的边，以及边 $A_iA_{i+1}$ 全部擦去．经过这样一次手续，多边形的边至少少了一条(例如 $A_iA_{i+1}$)．然后再选择任意一条未擦去的边，它也是全部或部分地被其

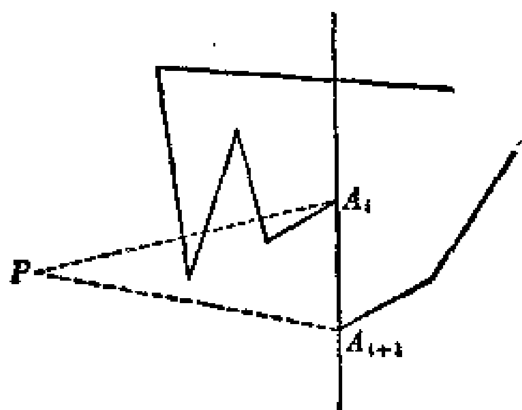


图 30

① 这里所谓数列 $\{a_n\}$ 的项的平均值是指:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}.$$

——译者

他未擦去的边遮住的，过这一边作直线，对这直线一侧的多边形其他边进行同样擦去的手续.

最多经过 $n-1$ 次手续以后，在最后一条直线上的边，从点 $P$ 看去就能全部看得见．擦去这一边，把它的两个端点同点 $P$ 连接起来，所得的两线段连同其余已擦去的 $n-1$ 边，得到所求的 $n+1$ 边形.

因为对于 $n=3$ 命题显然成立，根据数学归纳法，命题得证.

**27**．分别经过点 1、2、3 及点 1、2、4 画圆．如果点 4 在圆 123 的内部，或者点 3 在圆 124 的内部，那末题目提出的问题的回答是肯定的．我们假设，上述两种可能情况都不存在，容易证明，这时圆 123 在圆 124 外面的那一部分弧，被分成三部分 $13'$, $3'3''$, $3''2$(图 31)；如果点 3 在弧 $13'$ 上，那末点 1 在圆 234 内部；如果点 3 在弧 $3''2$ 上，那末点 2 在圆 134 内部；如果点 3 在弧 $3'3''$ 上，那末这两种现象同时存在.

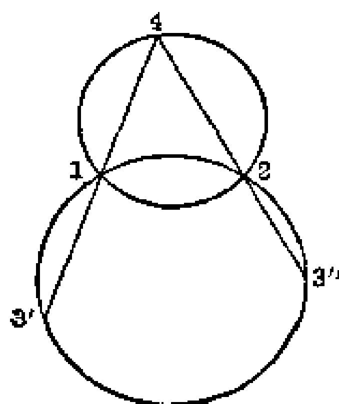


图 31

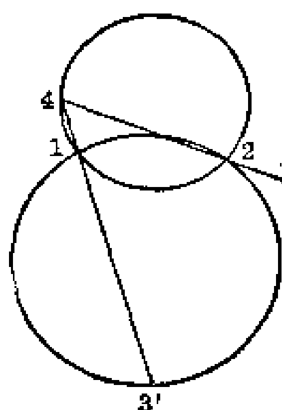


图 32

还要注意，弧 12 的上述三个部分中的一个或者两个部分，有可能不存在(图 32)．但是，题目所提的问题的回答仍然是肯定的.

**28**. 如图 33 所示，把椭圆切成四块再如图拼接，就得到所求的曲线(拼接时，有两块需要翻过来. ——译者).

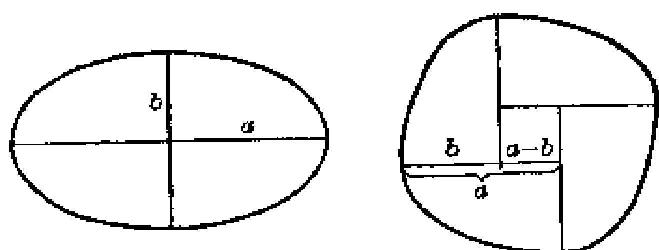



图 33

这里还有另外一种解法，不需要把任何一块翻过来. 我们顺次连接椭圆的顶点(图 34)，得到一个菱形，它的外面围着四个椭圆弓形. 菱形的面积等于 $2ab$. 作一个正方形，使它的面积等于 $c^2=a^2+b^2$，再把上述四个椭圆弓形分别紧接在正方形的四条边的外面. 这条曲线所围成的图形的面积与椭圆面积的差，等于正方形与菱形面积之差，即

$$c^2-2ab=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2.$$

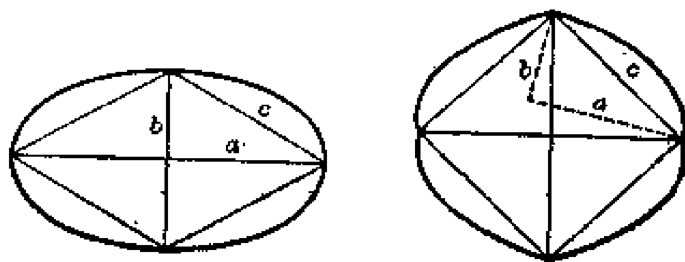



图 34

**29**. 以已知点为中心作一个球. 当我们经过这一点作几个平面划分空间时，就在球面上产生相交的大圆. 把其中一个大圆当作赤道，过球的一个极作切面，再从球心出发，把所有大圆投影到切面上. 大圆的投影(除赤道外)都是直线. 所以，我们要计算：用 $n-1$ 条直线把平面分成的区域最多有几

个．用数学归纳法容易得出，这个数等于$1+1+2+3+\cdots+(n-1)=1+\frac{1}{2}n(n-1)$．因为如果已有$k-1$条直线再画第$k$条直线时，增加的区域数最多是$k$个．由于球面上的区域数是投影面上区域数的两倍(因为赤道平面把球面分为两个半球面，每个半球面上的区域数都等于投影面上的区域数．——译者)，因而所求的数也是上面算出来的数的两倍，即$n(n-1)+2$．特别地，当$n=4$时，所求的数等于14．

**30**．容易验证题目所述的变换是反演(如果点$O$为定点，$k$是常数，点$X$、$Y$、$O$在一直线上且满足关系式：$OX\cdot OY=k^2$，我们就说从点$X$到点$Y$的变换是反演变换．——译者)．事实上，设$II_1$与$II_2$分别是过点$N$与$S$的地球的切面(图35)．假定，在题目所规定的变换下，平面$II_1$上的点$P_1$与平面$II_2$上的点$P_2$互相对应．我们来研究经过轴$NS$的平面，同地球以及平面$II_1$与$II_2$相截的情况(图36)．设$NP_1=r_1$，$SP_2=r_2$，$NS=2r$，从相似直角三角形$NTP_1$、$STN$、$P_2TS$得到等式$r_1r_2=4r^2$，根据反演定义，这等式表明点$P_1$到点$P_2$是反演变换．

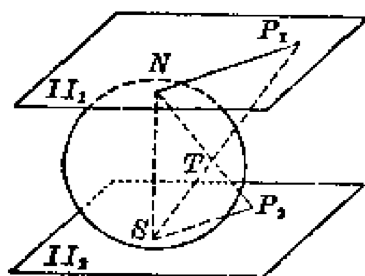


图 35

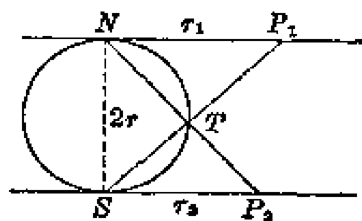


图 36

**31**．当正方体绕一条轴旋转时，纱线只能绕在那些与旋转轴没有公共点的棱上(图37)(绕在其他棱上，纱线就会脱出．——译者)，因此正方体的每个面都只有一半被纱线遮

盖，也就是说，整个正方体的表面只有一半被纱线遮盖.

现在，把正方体依次绕它的四条轴的每一条旋转，每次都绕上一种颜色的纱线.

例如，绕轴 $AC'$ 旋转时，绕上 $a$ 色(黑)的纱线，绕轴 $DB'$ 旋转时，绕上 $b$ 色(红)的纱线，绕轴 $BD'$ 旋转时，绕上 $c$ 色(黄)，绕轴 $CA'$ 旋转时，绕上 $d$ 色(蓝).

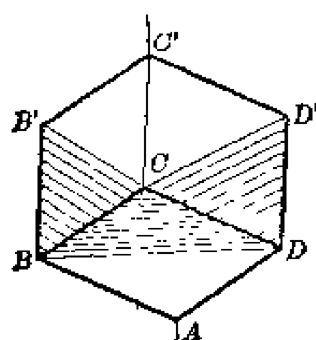



图 37

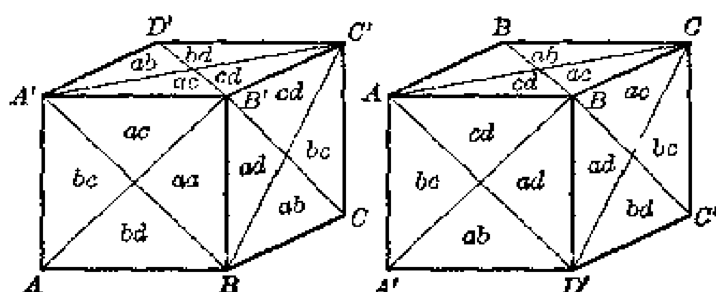



图 38

正方体上的颜色如图 38 所示，其中每个面都分成四个三角形，每个三角形中的字母表示所遮盖的颜色.

容易看出：

(1) 正方体表面上共有六种颜色，即四种原色每次取两种的全部组合：$ab$, $ac$, $ad$, $bc$, $bd$, $cd$;

(2) 每个面上有四种不同颜色;

(3) 正方体表面所遮盖的纱线有两层;

(4) 正方体每两个相对面上的颜色是相同的，但是颜色配置的旋转方向是相反的.

**32**. 我们证明，经过正方体表面每一点的短程线有四条，而整个正方体表面共有七族短程线.

如果假定正方体是光滑的，那末橡皮圈绕的路径，将是周长最小的多边形.

图 39 举出三种绕的路径，因而是三族短程线．每条短程线都在与正方体的面平行的平面内．为了确信还可能有其他的短程线族，我们用平行于底面对角线的平面去截正方体(图 40)．利用图 40 的记号，这时我们有：

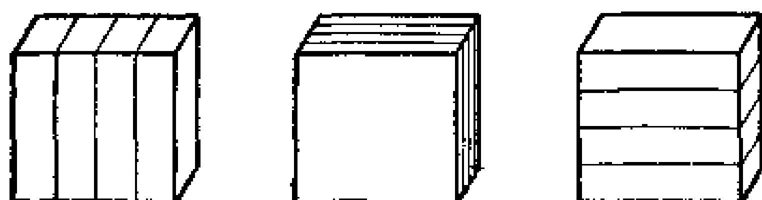


图 39

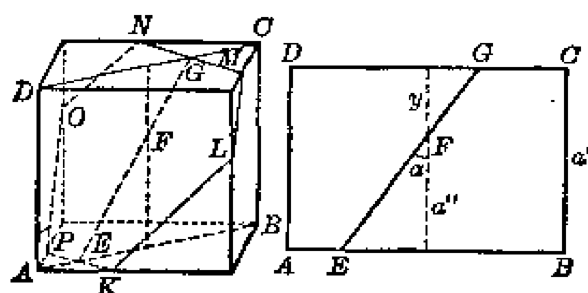



图 40

$$x+y=a,$$

$$PK=a\sqrt{2}-2x\operatorname{tg}\alpha,\qquad KL=x\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$MN=a\sqrt{2}-2y\operatorname{tg}\alpha,\qquad LM=y\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha},$$

六边形 $KLMNOP$ 的周长

$$p=2a\sqrt{2}-2a\operatorname{tg}\alpha+2a\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

所以，周长 $p$ 只跟角 $\alpha$ 有关，在所有平行的平面内都是如此．当 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，周长 $p$ 最小．这时，六边形 $KLMNOP$ 的各边分别同正方体各个面的对角线平行，这个六边形就是短程线．这样的短程线共有四族，如图 41 所示．连同上面的三族，因此总共有七族短程线．

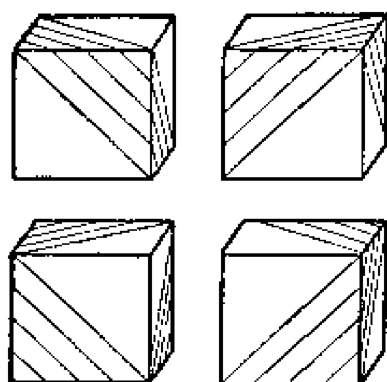


图 41

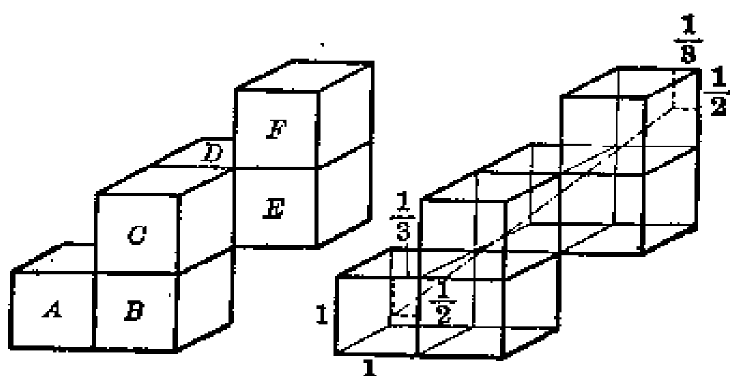



图 42　　　　图 43

**33**. 请观察图 42 所示的六个正方体的配置. 正方体 $B$ 看作是由 $A$ 按它们的公共面反射而得到, 同样, $C$ 由 $B$ 反射而得到, $D$ 由 $C$, $E$ 由 $D$, $F$ 由 $E$ 反射而得到. 根据反射定律, 要研究分子在正方体 $A$ 内的运动, 我们可以改为研究分子在正方体系 $A$, $\cdots$, $F$ 内的直线运动. 如果分子按六边形路线运动, 起点在 $A$ 的朝前的面上(朝读者的一面), 那末根据反射定律, 这点必定与正方体 $F$ 朝后的面(背向读者的一面)上的一点重合. (我们可以把面 $F$ 上的这一点看作分子运动一周的终点, 根据条件, 起点与终点是重合的. 请注意这两点在它所在面上的坐标之间的关系. ——译者)如图 43, 以起

点与终点为端点画一条线段，使它穿过全部正方体$A$，…，$F$，而且没有一处越出在这些正方体的外面．然后把六个正方体“集中”为一个，就是把$F$内的那一线段按$F$、$E$的公共面反射到$E$内（于是$E$内有两条线段．——译者），把$E$内的两条线段按$E$、$D$的公共面反射到$D$内，…等等，我们就得到图44所示的六边形，这就是所求的分子运动路线（图44指出了起点与终点的坐标，用解析几何方法可以证明，连接图43起点与终点的线段，穿过全部六个正方体而无一处越出正方体之外．——译者）．

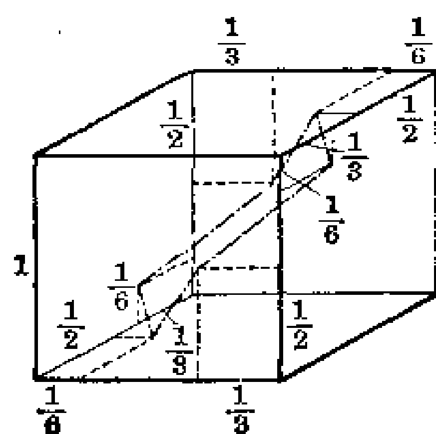
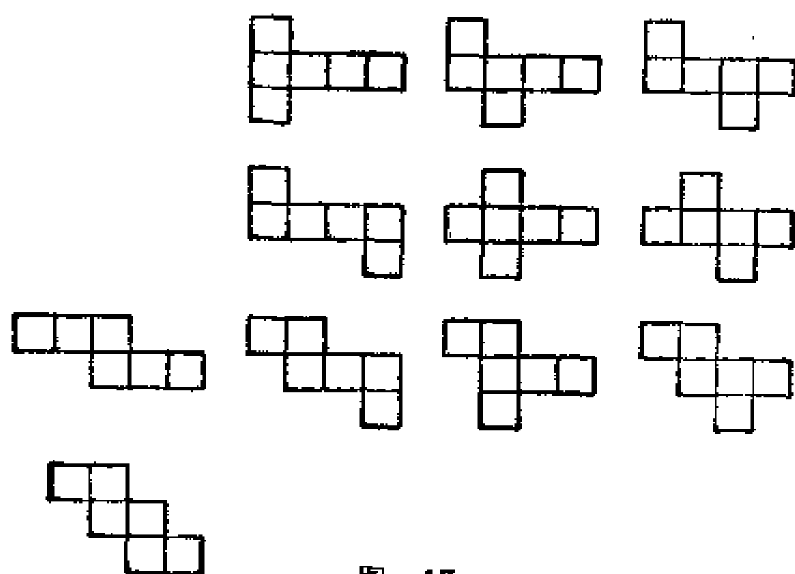


图 44

**34**．所有的展开图共11个，见图45．开头六个展开图中，正方体各有四个面在一条带上，其他几个展开图没有这种形式．其次的四个展开图中，各有三个面在一条带上，但是没有


图 45

四个面在一条带上．最后的一个展开图中，没有一条带有三个面．

**35**．切去正方体八个角后的形体，有 14 个面(正方体的面数＋正方体的角数)，其中八个面是三角形，六个面是八边形(图 46)．

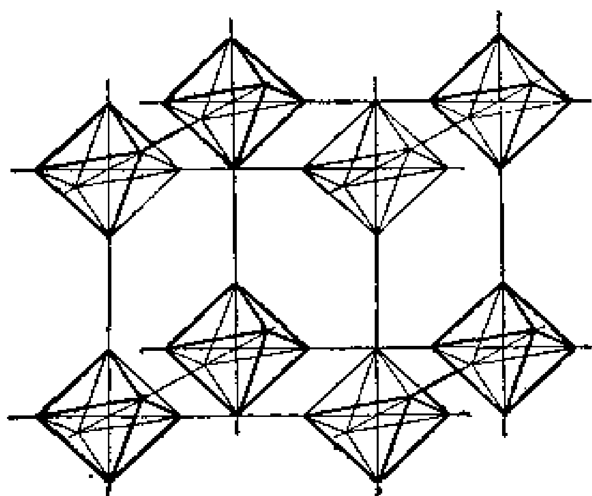


图 46

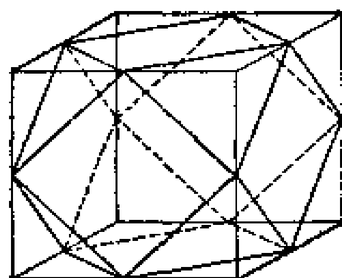


图 47

当八面体体积最大时，这个十四面体的面就是三角形与正方形两种(图 47)．因为八面体是由正方体所切去的八个四面体组成，这些四面体的底面积等于 $\frac{1}{8}$(把直角边长为 $\frac{1}{2}$ 的等腰直角三角形看作四面体的底面．——译者)，高等于正方体边长的一半，所以四面体占空间的 $\frac{1}{6}\left(8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\right)$．在每一个顶点处，聚集着六个形体，四个十四面体，两个八面体．

**36**．不难看出，题目中所提的问题的回答是肯定的．适合题目条件的六面体是平行六面体，它的棱都相等，而且每一顶点处的三个平面角也相等．

假设已知菱形的锐角是 $\alpha$，对角线分别等于 $2a$、$2b$. 把三个这样的菱形的锐角顶点接在一起，得到一个三面角. 这个三面角及它在平面上的正投影，如图 48 所示. 两个三面角对合在一起，形成一个题中所说的六面体.

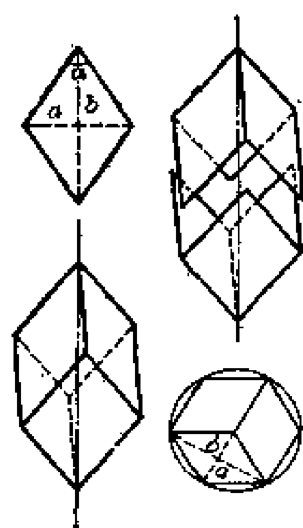


图 48

我们指出，如果 $\alpha<60°$，即如果 $b=a\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}>a\sqrt{3}$，那末六面体只能用上述方法作出. 如果 $\alpha>60°$，即如果 $a<b<a\sqrt{3}$ 或 $a>\dfrac{b}{\sqrt{3}}$，那末不仅可以把三个菱形的锐角，拼在一起得出三面角，还可以把三个钝角拼在一起得出三面角(因为这时钝角等于 $180°-\alpha<120°$，三个钝角之和小于 $360°$. ——译者)(图 49). 这时，除了图 48 所示的六面体外，还可以得到如图 49 所示的六面体，它也符合题目的条件.

如果 $\alpha=90°$，那末 $a=b$，两个六面体相同，都是正方体.

在图 50 中，我们看到这两种六面体的展开图.

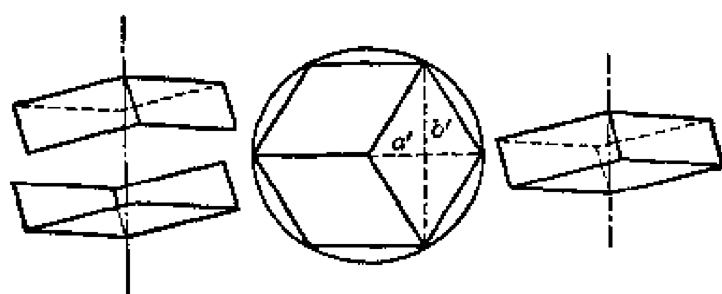
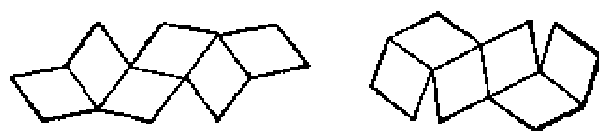


图 49


图 50

还值得指出，图 48 与 49 中的六面体，提供了这样的凸多面体的例子：面数相同，各个面对应全等，但是两个多面体不全等.

**37**. 取以$a$、$b$、$c$ 为边的两个三角形，使它们的 $c$ 边重合，其他两边都在 $c$ 边的同一侧(图 51). 以 $c$ 边为轴，把这两个三角形的平面张开(图 52)，顶点 $C_1$ 与 $C_2$ 之间的距离就随着增大(从 $C_2$ 向 $\triangle ABC$ 平面作垂线，设垂足为 $D$，$D$ 的轨迹为 $AB$ 的一条垂线线段. 从直角三角形 $C_2DC_1$ 看出，$C_1D$ 与 $C_2D$ 都随着平面张开而增大，因而 $C_1C_2$ 也随着增大. ——译者)，直至两个三角形又在一个平面内时，这个距离达到最大，这时两个三角形在边 $AB$ 的两侧(图 53).

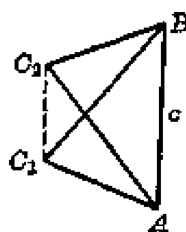


图 51

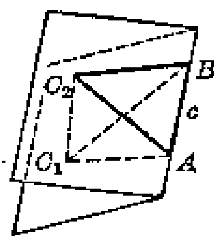


图 52

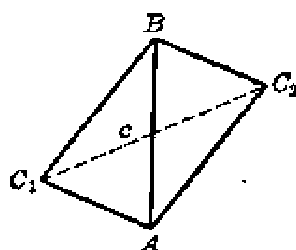


图 53

用 $d_1$ 表示图 51 中的距离 $C_1C_2$，用 $d_2$ 表示图 53 中同一个距离 $C_1C_2$. 我们假定符合题目条件的四面体是存在的，那末有不等式

$$d_1<c<d_2.$$

(图 52 中的四面体 $ABC_2C_1$ 如果符合题目条件，那末它的四个面是全等三角形，容易看出对应边 $C_1C_2=c$. 由于两平面张开时，距离 $C_1C_2$ 随之增大，因而图 51 中的 $C_1C_2<$图 52 中的 $C_1C_2<$图 53 中的 $C_1C_2$，即 $d_1<c<d_2$. 反过来，如果这不等式成立，由于两平面张开时，$C_1C_2$ 是连续增大的，那末总

能够找到某一时刻使 $C_1C_2=c$，这时所形成的四面体 $ABC_2C_1$ 符合条件. ——译者)

不等式 $d_1<c$ 成立的充分必要条件是，角 $A$ 与角 $B$ 都是锐角；不等式 $c<d_3$ 成立的充分必要条件是角 $C$ 是锐角. 所以符合条件的四面体存在的充分必要条件是 $ABC$ 为锐角三角形.

假设三角形 $ABC$ 是锐角三角形，图 54 是符合题目条件的四面体的展开图，并且

$$A_1B_1 /\!/ AB,\quad B_1C_1 /\!/ BC,\quad C_1A_1 /\!/ CA.$$

设

$$BC=a,\ CA=b,\ AB=c,$$
$$a\leqslant b\leqslant c,\ 2p=a+b+c.$$

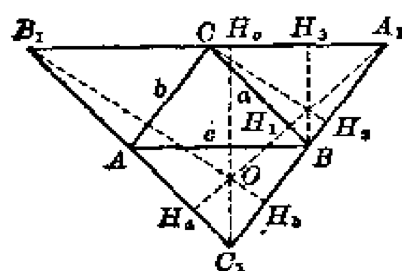


图 54

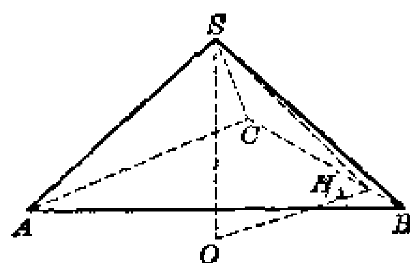


图 55

保持图 54 与图 55 所用的记号，我们注意到四面体的高 $h=SO$ 可以求出，因为在直角三角形 $SH_1O$ 中，$SH_1=A_1H_1$ 与 $H_1O$ 可以先算出，事实上，

$$A_1H_1=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$OH_1=H_1H_a-OH_a,\ H_1H_a=A_1H_1,$$

由于三角形 $C_1OH_a$ 与 $C_1B_1H_a$ 相似，得比例式

$$\frac{OH_a}{C_1H_a}=\frac{B_1H_a}{C_1H_a},$$

因而 $OH_a$ 可以算出. 经过简单的计算，可得:

$$OH_a=\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}{4a\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

现在我们有:

$$\begin{aligned}h^2&=(A_1H_1)^2-(H_1H_a-OH_a)^2\\&=OH_a(A_1H_a-OH_a)\\&=\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{8p(p-a)(p-b)(p-c)}.\end{aligned}$$

设四面体的体积为 $V$，最后我们得到:

$$\begin{aligned}V&=\frac{h}{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\\&=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}.\end{aligned}$$

**38**. 符合题目条件的 $2n$ 面体是存在的，并且不难指出它的作法. 为此，我们设想有两个半径相同的平行圆盘，它们的圆心 $O_1$ 与 $O_2$ 在圆盘 $T_1$ 与 $T_2$ 的平面的公垂线上(图 56). 把每个圆盘的圆周分成 $n\geqslant3$ 等分，设点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 与 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 分别是圆盘 $T_1$ 与 $T_2$ 的圆周上的分点. 把圆盘 $T_1$ 在它所在的平面内绕 $O_1$ 旋转，使点 $P_k$ 在圆盘 $T_2$ 平面内的正投影，同弧 $Q_kQ_{k+1}$ 的中点重合(点 $P_n$ 的正投影同弧 $Q_nQ_1$ 的中点重合).

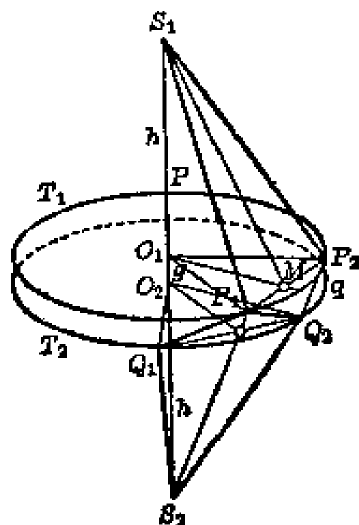


图 56

在线段 $O_1O_2$ 两端延长线上分别截取相等的线段 $O_1S_1$ 与 $O_2S_2$，长度各为 $h$(图 56).

然后把点 $S_1$ 与每一个点 $P_k$ 连接，把点 $S_2$ 与每一个点 $Q_k$

连接．同样地，再把每一个 $P_k$ 与点 $Q_k$、$Q_{k+1}$ 连接，这样就作出了 $4n$ 面体的骨架，图 56 画出了它的部分图形．

我们证明，可以适当地选择这个多面体的尺寸，使它成为各个面都全等的 $2n$ 面体．

事实上，设线段 $O_1O_2$ 的长等于 $g$，我们考察四边形 $S_1P_1Q_2P_2$．设线段 $P_1P_2$ 的中点为 $M$．要使上述多面体是各个面都全等的 $2n$ 面体，充分必要条件是线段 $S_1Q_2$ 与 $P_1P_2$ 相交于点 $M$（注意：四边形 $S_1P_1Q_2P_2$ 一般地说是空间四边形，如果 $S_1Q_2$ 与 $P_1P_2$ 相交，那末它就成为平面四边形了，原来的 $4n$ 面体就成为 $2n$ 面体了．——译者）．这个条件是可以满足的，如果下面的等式成立：

$$h:O_1M=(h+g):O_2Q_2,$$

由此得出

$$g=O_1O_2=h\frac{O_2Q_2-O_1M}{O_1M}.$$

当 $n=4$ 时，我们得到题目所要求的八面体．

可以证明，适合题目条件的 $2n$ 面体，它的各个面是全等的筝形（一条对角线垂直平分另一条对角线的四边形叫做筝形．——译者），仅当 $n=3$ 时是菱形（参看第 36 题）．

**39**．一个多面体形成空间的网，网的边就是多面体的棱，网的结点就是多面体的顶点，网眼就是它的面．苍蝇经过的路径，必须形成一条属于这个网的封闭折线（没有相重的点）．如果我们把网展开平铺放在平面上，苍蝇经过的路径仍旧是一条封闭的折线．

在图 57 中，我们看到展铺在平面上的正十二面体的网，粗线表示符合条件的苍蝇的路径．

用同样的方法，把各个面是菱形的十二面体的网，展铺在

平面上(图 58). 网的结点可分两类: 第一类每一结点处聚集着三条棱,第二类每一结点处聚集着四条棱(图中第二类结点用黑圆点表示).

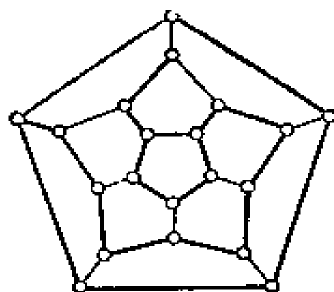


图 57

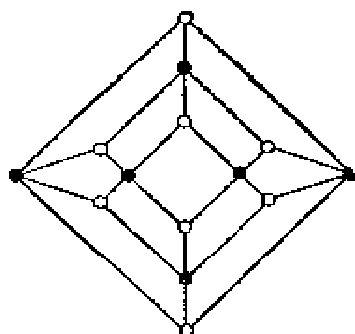


图 58

第一类每一个结点只同第二类的结点连成线段, 反过来也一样. 因此苍蝇旅行时, 必须轮流地经过第一类结点与第二类结点. 而第一类结点有八个,第二类结点只有六个,所以苍蝇不可能沿着各个面是菱形的十二面体的棱, 从一点出发经过所有的顶点回到原处(任意一个顶点不经过两次).

**40**. 把正十二面体的一个面朝向我们, 这个面叫做"前面". 同这个面平行的面叫做"后面"(我们看不到). 围绕着前面的五个可见的面的总体,叫做环 $I$, 围绕着后面的五个不可见的面的总体叫做环 $II$.

由于题目要求的是十二面体的面,有几种涂色方法,所以十二面体可以用图 59 所示的平面图形代替(后面 $T$ 所对应的平面图形,就是外面的大五边形),或者用图 60 所示的更简单的图形代替.

用三种颜色不可能给正十二面体涂色, 使相邻的面的颜色都不相同. 事实上,假定前面是 $A$ 色,由于环 $I$ 的五个面都同前面相邻, 所以这五个面只能有两种颜色 $B$ 与 $C$, 这是不可能的(因为这时环 $I$ 有两个相邻的面颜色相同.——译者).

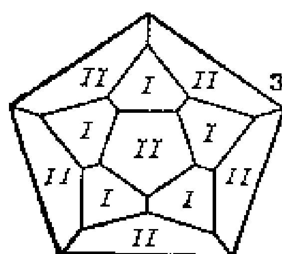



图 59

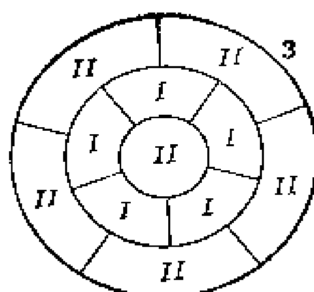



图 60

现在假定，按题目要求的方法，可以用 $A$, $B$, $C$, $D$ 四种颜色涂十二面体的面. 容易看出，这时每种颜色都出现三次. 我们用反证法证明这一点. 假设某一种颜色(例如 $A$)出现少于 3 次，那末总有另一种颜色(例如 $B$)将多于 3 次. 我们把一个涂 $B$ 色的面当作前面，那末 $B$ 色不可能在环 $I$ 中出现，于是六个看不见的面将至少有三个面是 $B$ 色，但这是不可能的. 因为如果后面是 $B$ 色，那末环 $II$ 中不可能出现 $B$ 色. 如果后面不是 $B$ 色，那末环 $II$ 中最多也只有两个面是 $B$ 色. 这就证明了任何一种颜色出现不能多于 3 次，也就是说每种颜色都只能出现 3 次.

从上面的推理还得出：后面的颜色不可能与前面的颜色相同，但是一定与环 $I$ 中出现两次的那种颜色相同.

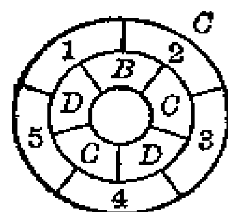



图 61

最后，我们注意到，如果环 $I$ 各个面的颜色及其排列方式，以及后面的颜色都已经确定，那末我们可以同时唯一地确定十二面体所有面的颜色. 事实上，假定环 $I$ 各个面及后面的颜色如图 61 所示，那末前面必定是 $A$ 色. 至于环 $II$ 各个面的颜色，我们看出：面 1 除 $A$ 色外不可能是别的颜色，这时面 2 必是 $D$ 色，面 5 是 $B$ 色，因而面 3、4 分别是 $B$、$A$ 色. 这个例子证明了，十二面体

用四种颜色涂是可能的(当然要满足题目条件. ——译者).

假定我们用四种颜色涂十二面体，它的前面是 $A$ 色. 这时环 $I$ 的颜色配置可能有六种不同方法(这是三种元素 $B$, $C$, $D$, 每次取五个元素作环状排列，并且要求相邻两个元素都不同. 先证明每个排列中必定有一种元素只出现一次，这个元素固定后，其他两种元素只能相间地各出现两次，因而排列数为 $3\times2!=6$. ——译者)，因为每一个后面的颜色有两种可能，那末总共有 12 种可能的颜色配置方法，见图 62. 但是由于涂十二面体的颜色是四种，$A$ 色的面只出现三次，那末当我们选定了图 62 中任意一种涂色方法后，把十二面体适当地转动，让其他两个涂 $A$ 色的面分别变为前面，所得的两种涂色方法与选定的涂色方法可能是相同的，除此之外，不可能再有其他涂色方法与选定的相同. 因而十二种涂色方法中，每组相同的涂色方法最多只有三种. 由此得出，十二面体的

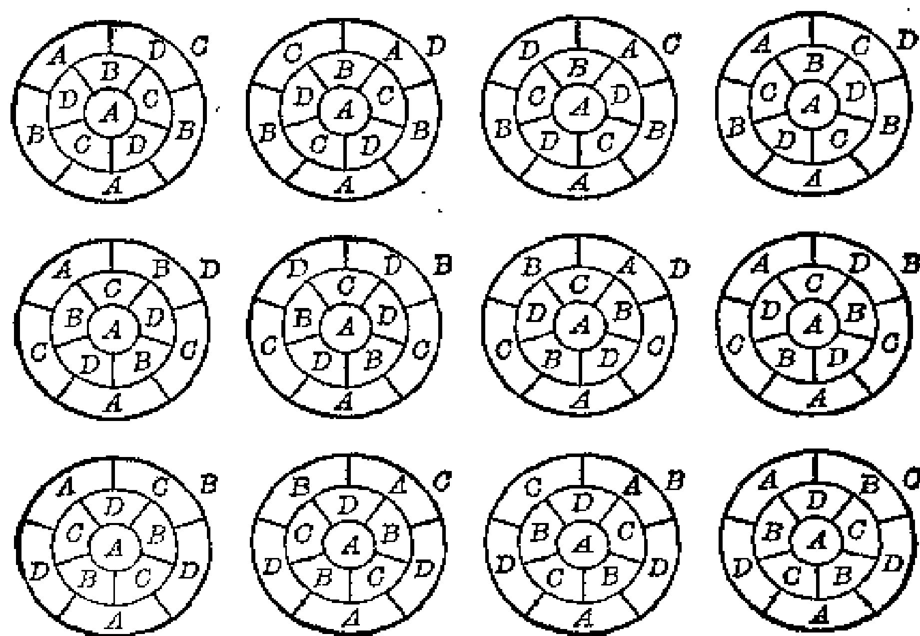



图 62

不同的涂色方法最少有四种.

容易证明，正好存在四种不同的涂色方法.

事实上，图 62 同一直列的三个涂色方法都是相同的，第一横行的四种涂色方法都是不同的.

**41**. 图 63 是正十二面体及其内接正方体的"照片"，图 64 是这个十二面体及其内接正方体的平行投影图.

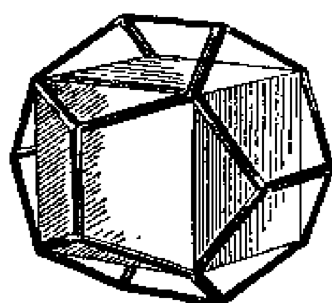


图 63

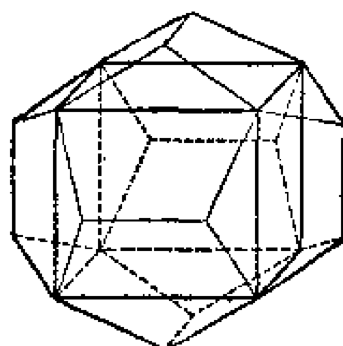


图 64

由题设，正方体内接于十二面体可能有五种不同的方法(把正十二面体位置固定，由于每个面有五条对角线，因而正方体有五种不同的内接方法. ——译者)、图 65 是其中一个正方体(就是图 64 中的那个)，分别与其余四个内接正方体贯穿情况的图.

图 66 是十二面体及其内接正方体的轴截面图，粗线表示由所有正方体组成的形体的截面. 从这个图出发，可以容易地作出，由所有正方体组成的形体的展开图或直观图. 这个形体是有 360 面的星状体，它的基本元素是由正方体的棱组成的"五角星"(图 67)，每一个对应十二面体的一个面，所以共有十二个"五角星". 每个"五角星"的中心有一个五个面的凹穴，周围还有五个三个面的凹穴. 每个星的周围又有五个四个面的凹穴，这五个四个面的凹穴，把这个星同相邻的五

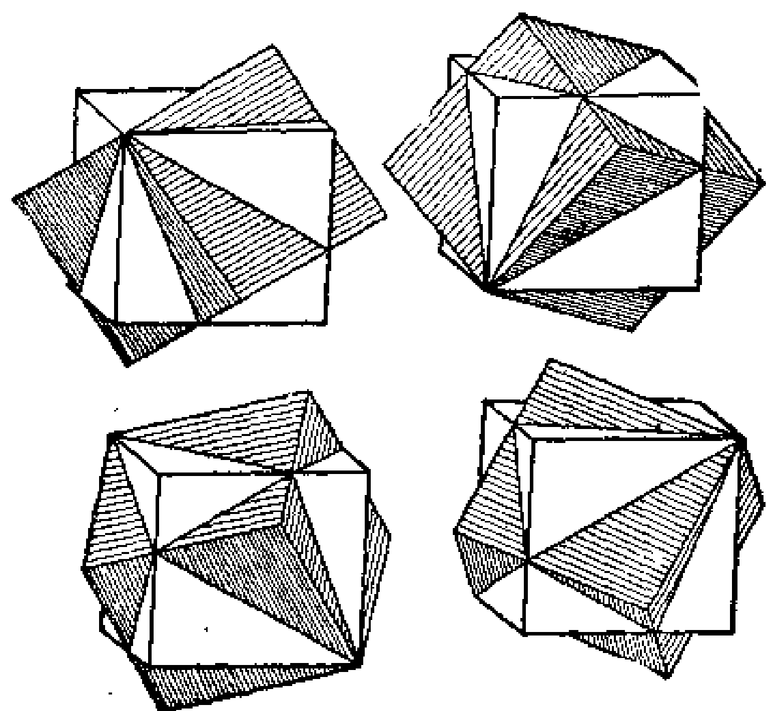


图 65

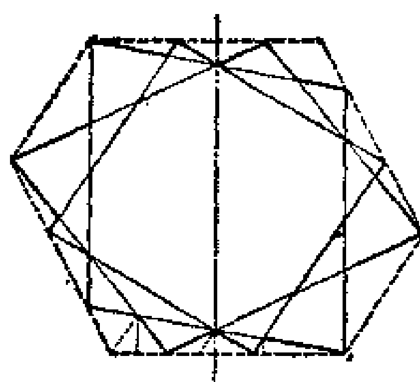


图 66

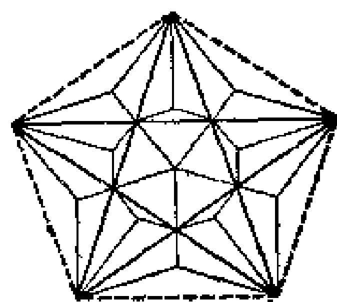


图 67

个星连接起来(图 67 中每个四个面的凹穴各只画出它的两个面).

图 68 是由所有正方体组成的形体的直角投影图(向外接十二面体的一个面看过去).在图上我们看到中心的星,以及围绕着它的五个相邻的星,不过后者画在图上已经变形了.星

的尖端三个三个一组地聚集于原十二面体的顶点，总共形成20个十二面的塔(原来的正十二面体共有20个顶点. ——译者). 塔的周围是由正方体的棱组成的等边三角形. 图69是向塔的方向，也就是向十二面体的顶点的方向看过去的直角投影图. 图上可以看到三个星聚集于已知的塔，还可以看到与这三个星相邻的三个星.

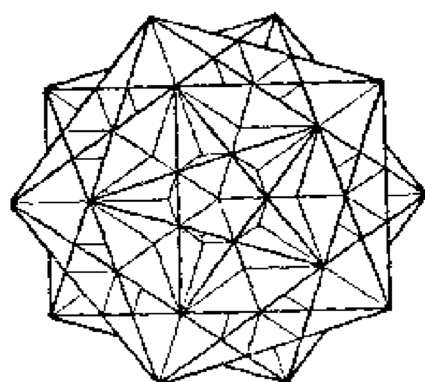


图 68

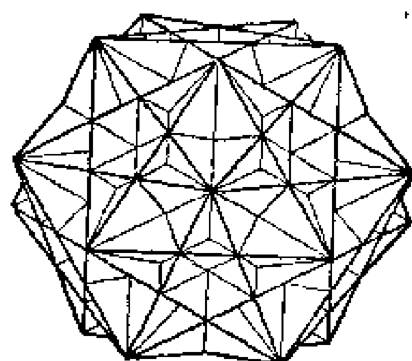


图 69

最后，图70是向正方体的一个面，也就是向连接相邻的星的四个面的凹穴，或者向十二面体的棱的方向看过去的直角投影图.

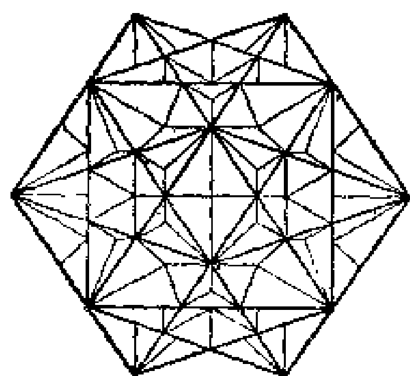


图 70

要计算星状体的体积，比较方便的办法是，先算出十二面体的面(即图67的星)所分成的每一部分的面积. 然后利用图66结合图67，求出星的各个凹穴顶点到十二面体的面的距离. 这样就可以计算棱锥的体积，从十二面体体积减去这些棱锥的体积，就得到星状体的体积.

设 $a$ 表示十二面体的棱长，$R$ 表示十二面体的外接圆半径，那末

$$R=\frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

这样，就可以分别算出各个棱锥的底面积与高，其值如下。

对于每个三个面的凹穴：

$$S_1=\frac{R^2}{16}(7\sqrt{5}-15)\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$h_1=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-2),$$

对于五个面的凹穴：

$$S_2=\frac{5R^2}{16}(7-3\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$h_2=\frac{R}{4}(3-\sqrt{5}),$$

对于每一个四个面的凹穴的一半：

$$S_3=\frac{R^2}{8}(5-2\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$h_3=\frac{R}{4}(\sqrt{5}-1).$$

所以，要计算星状体体积 $V'$，必须从正十二面体体积

$$V=\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$$

减去十二组上述棱锥的体积，即

$$12\cdot\frac{1}{3}(5S_1h_1+S_2h_2+5S_3h_3),$$

（每个"五角星"对应有一组棱锥，其中有一个五棱锥，五个三棱锥，五个"半个的"四棱锥，这里的棱锥其实是凹穴。——译者）

最后，由此得到：

$$\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}(79\sqrt{5}-175).$$

还有一个问题是，所有正方体的公共部分是怎样的形体。我们再次利用正十二面体及其内接正方体的轴截面图（图 71 中，粗线部分，是现在所考察的形体的轴截面图），可以得出结论，所有正方体的公共部分，是各个面都是菱形的三十面体，图 72 是它的平行投影图．$AB$ 是菱形较长的对角线，$AC$ 是较短的对角线(图 72)．图 73～75 是这个三十面体的直角投影图，它们分别是从五面角(图 71 中的轴 $aa'$)，从三面角(图 71 中的轴 $bb'$)与从面(图 71 中的轴 $cc'$)的方向投射的．

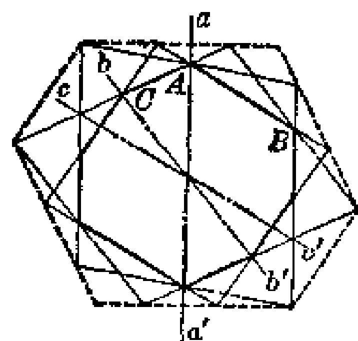
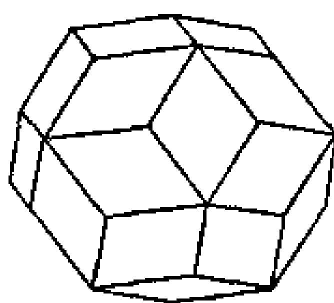
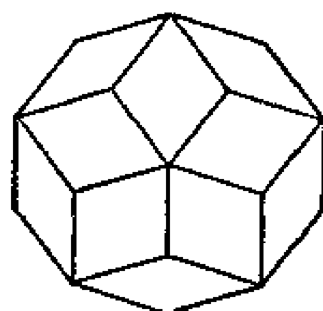
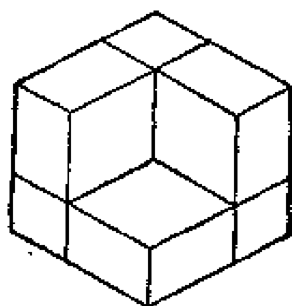
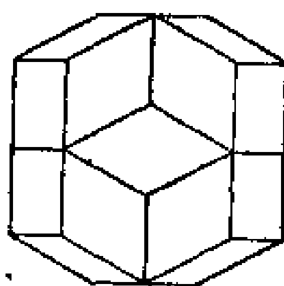


图 71


图 72


图 73


图 74


图 75

**42**. 取任意一个凸多面体，把它的一个面当作底面，作一个棱锥，使这底面与各侧面所夹的两面角，小到符合如下条件：原来的凸多面体添加这个棱锥后，仍旧是凸多面体，原来的凸多面体，以这个选定的底面为对称面，可以形成一个与所作棱锥对称的凹穴．这样就得到两个多面体，一个是凸的，另一个是非凸的，它们的各个面都是凸多边形，而且对应全等．图 76 所示的两个多面体 $ABCDE$ 与 $ABCDE'$，是由四面体 $ABCD$ 利用上述方法得到的．

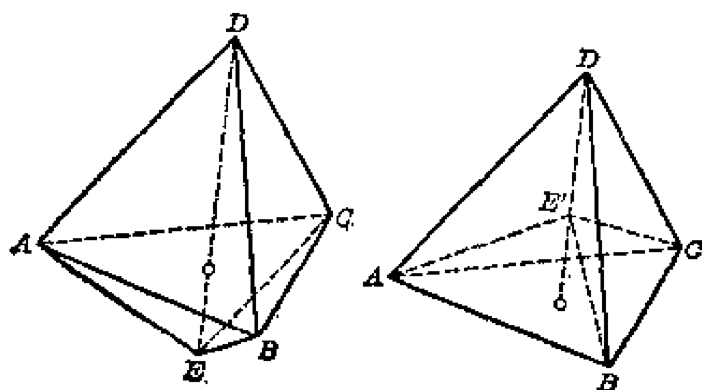



图 76

图 77 与 78 所示的两个三十面体，一个是凸的，另一个是非凸的，它们的各个面都是凸多边形，而且对应全等．

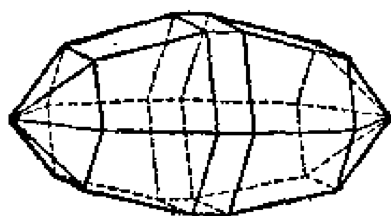


图 77

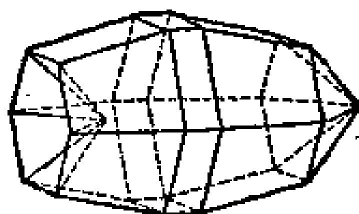


图 78

**43**. 我们在图 79 与 80 中可以看到满足题目条件的形体．图 80 的形体由各个面都是菱形的两个平行六面体组成，它们以一个面为公共面相邻接．

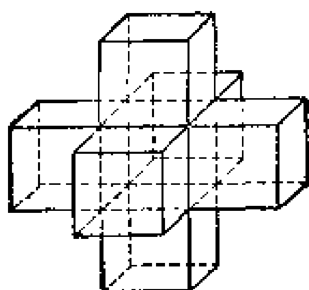


图 79

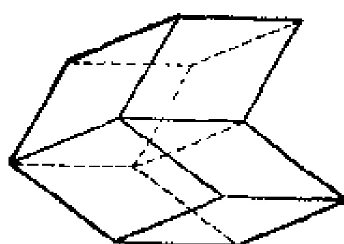
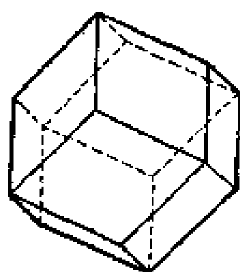


图 80



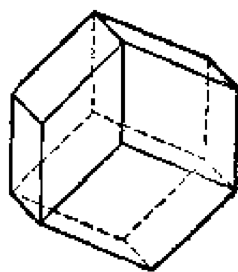


图 81

还存在各个面都是菱形的非凸的十二面体，它可以用下面的方法得到：把各个面都是菱形的凸十二面体，朝前的那个三面角拿掉（见图 81 左），再把朝后的那个三面角，沿着其余六个面所形成的棱平行移动，代替被拿掉的三面角（图81右）。

我们看到，这样形成的形体由三个平行六面体组成，如果拿掉其中一个，剩下的就是图 80 所示的那个形体。

**44**．要寻求题中所述，由正多面体的棱形成的所有的多边形（空间多边形，下同．——译者），特别要寻求其中那些只有位置上区别，而没有形式上区别的多边形，对于二十面体尤其困难．因此，我们设法把多面体用它的展开图的简图代替（图 82 左、中、右三个图分别是正四面体、正六面体、正八面体的展开图简图），有了这个解决办法，我们就可以把原来的问题化为平面内的问题来研究．

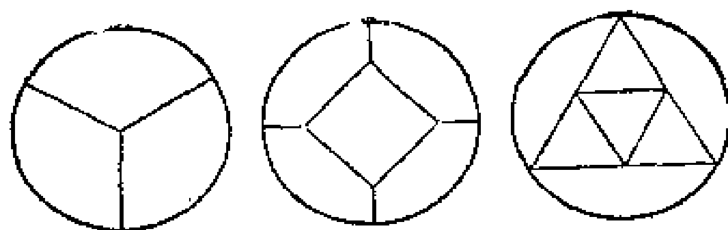


图 82

如果设想多面体的棱是松弛可以伸缩的，我们把多面体拉开(例如从“后面”开始撑开)，使多面体的所有顶点落在一个平面内，就可以得到对应的平面展开图(看作一个平面网.——译者)．多面体的顶点对应平面网的结点，多面体的棱对应连接结点的线段或者弧，多面体的每一个面对应一个网眼或者对应展开图最外面的圆．沿着多面体的棱绕行，对应着沿平面网的边或弧绕行．连接正多面体所有顶点的空间多边形，对应着经过平面网所有结点而不交叉的封闭折线，并且折线的边数与已知正多面体的顶点数相等(展开图上的弧也当作边)，不过这要看图的不同而异，因为平面图上可能把好几条边画成一条线段(例如图 84 粗线所示的多边形由六条边组成，其中有两条边画成一条线段．——译者)．

现在我们建立一种多边形的符号表示法，使每个多边形用一个符号表示，以便区分题目中所述的各个空间多边形，方法如下：设想一个游泳者面向多面体内部，沿着多面体的棱 $AB$ 游泳，游到点 $B$ 后，有好几条路径可供选择，路径的条数等于多面体从一个顶点出发的棱数减 1．把这些路径用数字表示：当游泳者面向正方体内部，从游过来的线段 $AB$ 开始，按顺时针方向的顺序，把这些到 $B$ 点后可供选择路径分别用 0、1、2、3 等数字表示．对于正四面体、正六面体与正十二面体，由于它们从一点出发的棱都是 3 条，因而可供选择的路径

只有两条，它们按顺时针方向顺序分别用 0、1 表示．同理，对于正八面体，用数字 0、1、2 表示，对于正二十面体，用数字 0、1、2、3 表示．这样一来，经过正多面体所有顶点的每一个空间多边形，对应一串数字，多面体有几个顶点，它就有几个数字．例如，图 83 中，如果从点 $A$ 出发按箭头所示方向沿粗线绕行一周，那末所成的两个多边形，分别对应符号00110011 与 11001100．

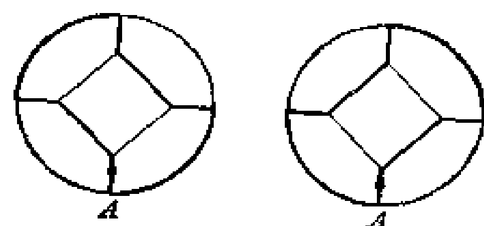


图 83

我们注意到，用上述符号表示多边形时，究竟从哪个数字开始是没有关系的，只要最后一个数字后面紧接开头那个数字就行．事实上，多边形的符号如果从另一个数字开始，那末对应的路径就从多面体的另一个顶点开始．因此，图 83 两个多边形是一样的，虽然它们的位置并不相同．

其次，我们要指出，如果已知一个多边形的符号，把这多边形通过给定的镜象反射（即关于平面的对称变换），得出另一个多边形，那末可以很容易地写出它的符号．方法如下：如果符号是由数字 0、1 组成，那末只要把 0、1 分别换成 1、0 就可以；如果符号是由 0、1、2 组成，那末把 0、2 分别换成 2、0（1 不变）；如果符号是由 0、1、2、3 组成，那末把 0、1、2、3 分别换成 3、2、1、0．例如图 83 的两个多边形中，每一个都是由另一个经过对称变换得到，比较它们的符号就可以看出这一点．

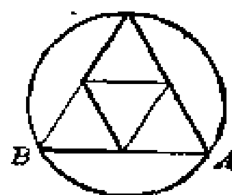


图 84

最后，还要指出，每个多边形都可以按两个相反的方向绕行．例如，对于图 84 的多边形，先从点 $A$ 开始，按 $AB$ 方向绕行，然后从点 $B$ 开始，按 $BA$

方向绕行，我们分别得到对应的符号 201201 与 120120(注意每个多边形有六条边而不是五条！——译者)．其中第二个符号可以这样得出：先根据上面关于对称图形的数字变换方法，变换第一个符号的数字(成为 021021)，再把这个数字倒过来就是．

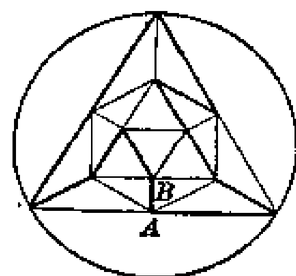


图 85

对于图 84 的情况，同一条封闭折线按相反方向绕行，所得的两个符号实质上是相同的，因为第二个符号从第二个数字开始读，就成为第一个符号．但是，对于其他情况并非永远如此．例如，图 85 中，从点 $A$ 开始，按 $AB$ 方向沿着封闭折线绕行，符号是 102302301132，但是从点 $B$ 开始，按 $BA$ 方向沿同一条折线绕行，符号却是 102230130132．这两个符号不是一样的，虽然它们所代表的曲线仅仅是绕行方向不同．

这个事实不难解释．如果游泳者面对二十面体，按 $AB$ 方向沿着折线游泳(见图 85)，那末他右手一侧的二十面体的面，在图 85 中是在封闭折线的内部．游泳者按相反方向沿着这条折线游泳(见图 85)，那末他右手一侧的二十面体的面，就是图 85 中去掉折线内部的面后所剩下的面．因此，我们所用的符号，不但表示出折线，而且也表示出折线的内部．所以，如果已知折线把多面体的表面分为面数相等的两部分(例如图 84 那样)，那末改变绕行方向，并不改变折线的符号．如果所分成的两部分面数不相等(例如图 85 那样)，那末改变绕行方向就要改变折线的符号．因此，证明两个多边形相同时，必须记住，同一个多边形可能有两个不同的符号．

这些预备知识，可以帮助我们列举与证明哪些多边形只

有位置不同而没有形式不同．现在我们就来逐个研究不同的正多面体，回答题目的问题．

先从正四面体开始．正四面体有四个顶点，所以题目所述的多边形有四条边．这样的多边形用由0、1组成的四个数字表示．但是，其中不可能接连出现两个0或者两个1，因为这样将形成三角形环路（或译“短路”，这时就不能得到符合条件的多边形．——译者）（图86）．因此，多边形的符号应该是0、1相间．这样的多边形唯一的一个是0101，因为符号1010代表的多边形与它是同一个多边形．

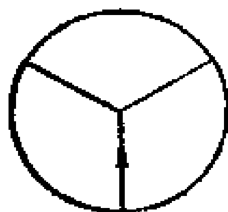


图 86

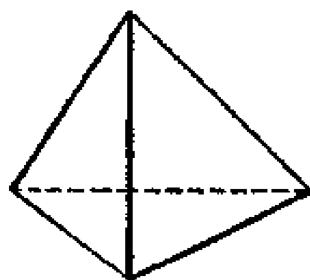
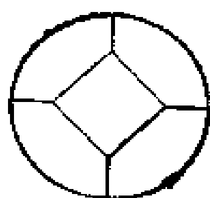


图 87

所以，对于四面体，本题只有一个解（图87）．这时我们可以验证，对多边形0101进行对称变换或按相反方向绕行，结果得到的永远是与原来一样的多边形．

正方体有八个顶点．适合题目条件的解是用八个数字表示的八边形．它的符号中，不可能连续出现三个0或者三个1，因为这样就会出现四边形环路（见图88）．因此，适合题目条件的多边形符号中，0与1都必须出现．但是多边形01010101不满足题目条件（图89）（因为多面体有一个顶点没有经过，同理，多边形01010011也不符合条件．——译者），所以每个符合题目条件的多边形的符号，必须是两个0或两个1接连出现．如果开头是两个1接连出现（如果接连的两


图 88

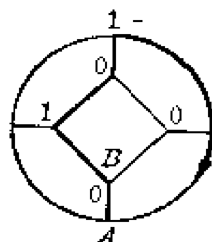
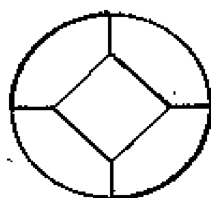
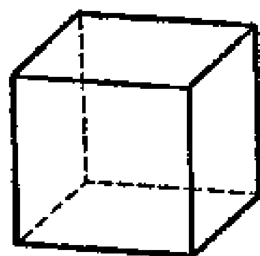


图 89


图 90

个1不在开头，适当改变起点，总可以使它在开头出现．——译者)，我们把多边形换成它的对称多边形，就只限于列举开头两个数字是0的经过棱$AB$的多边形了．其他的多边形(如果存在的话)，可以通过对称变换得到．

但是，满足这些条件的多面体只有一个，就是00110011(图90)．由于对称变换得出的仍是这个多边形11001100，所以这时本题只有一个解(图91)．不难验证，按相反方向沿多边形00110011绕行，我们仍然得到同一个多边形，也就是说，图91的封闭折线把正方体的表面分成全等的两部分．


图 91

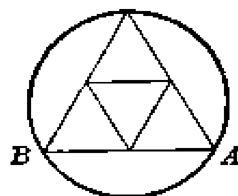


图 92

现在我们转到正八面体(图92)．符合条件的封闭折线由六条边组成，它的符号是由0、1、2组成的六位数．因为这个符号中不可能接连出现三个1(这将出现四边形环路)，所以每个适合条件的六边形的符号中，数字0与2至少含有一个．如果含有2(总可以设它在开头)，我们把六边形换成与它对称的六边形，可以看出，解答本题只要列举经过一条棱

(例如 $AB$)，开头的数字是 0 的多边形就可以. 这样的六边形有三个(图 93)，它们对应的符号是

[1] 012012, [2] 020202, [3] 021021.

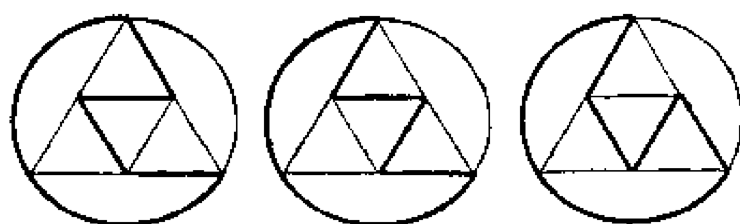


图 93

把它们进行对称变换后，得到六边形

210210, 202020, 201201,

这三个六边形分别与[3]，[2]，[1]相同. 由此得出，在对称变换下，第一个六边形变为第三个，第三个变为第一个，第二个变为自己.

因此，对于正八面体，本题有三个解：一个对称解 020202(图 94 中)，两个非对称解 012012 和 021021(图 94 左、右).

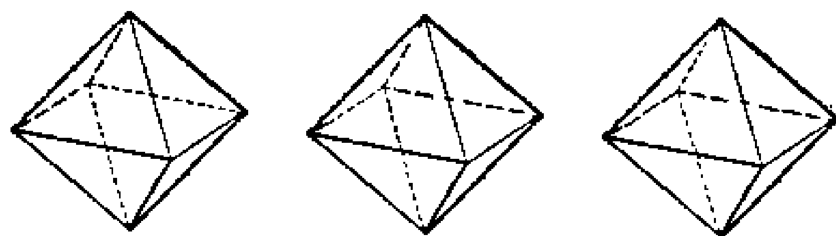


图 94

按相反方向沿着每个所得的封闭折线绕行，我们得到分别与原来多边形同样的符号，这表明，每条封闭折线都把八面体的表面分为全等的两部分.

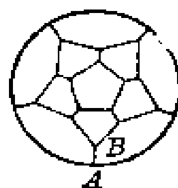



图 95

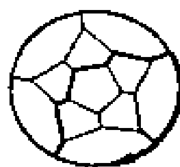


图 96

对于正十二面体(图 95)，适合题目条件的多边形由二十条边组

成，它的符号是由 0、1 组成的二十位数. 因为多边形

01010101010101010101

不适合题目条件(图 96)，所以每个适合题目条件的多边形的符号中，至少要接连出现两个 0 或两个 1. 当有两个 1 接连出现，我们把多边形用对称的多边形代替，就只限于列举经过棱 $AB$，符号的开头两个数字是 0 的多边形了. 其余的多边形(如果存在的话)，我们可以通过对称得出.

依次研究所有可能情况，我们容易确信，经过棱 $AB$，符号的开头两个数字是 0 的多边形有四个(图 97)，就是：

[1] 00010101110001010111,

[2] 00011101010001110101,

[3] 00101011100010101110,

[4] 00111010100011101010.

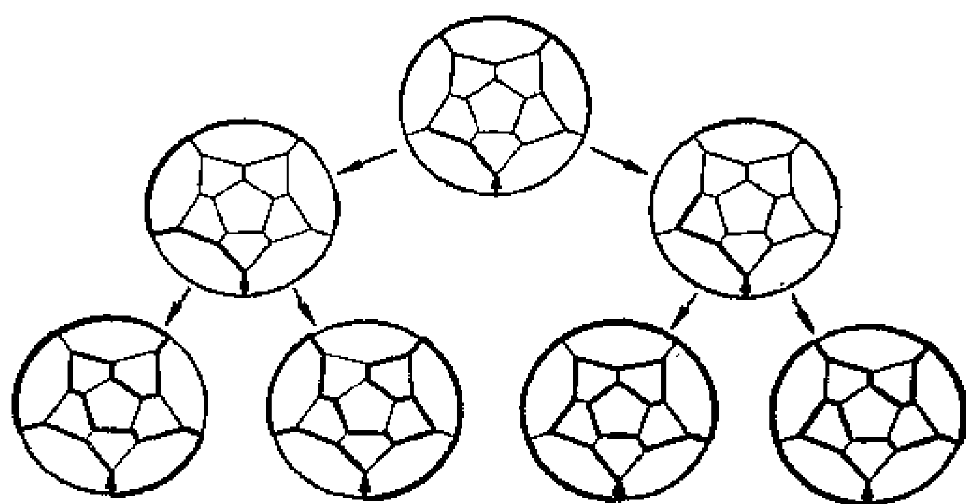


图 97

多边形[1]与[3]是一样的，此外多边形[2]与[4]也一样，而多边形[2]是由多边形[1]通过对称变换得到. 对多边形[1]与[2]按相反方向绕行，各给出与原来相同的符号. 由此得

出，对于正十二面体，本题两个非对称的但是互相对称的解．所得的每一条封闭折线，都把十二面体的表面分成两个全等的部分(图 98)．

最困难的是正二十面体的情况(图 99)．这时，适合题目条件的多边形应该是十二边形，它的符号是由 0、1、2、3 组成的十二位数．设已知满足题目条件的多边形 $W$ 的符号为

$$102123102123. \qquad (W)$$

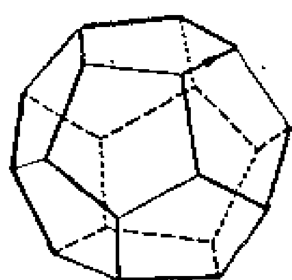
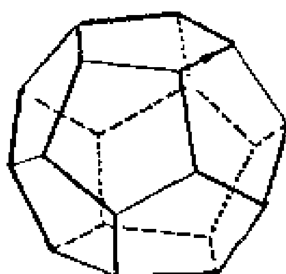



图 98

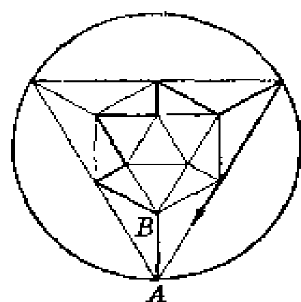



图 99

多边形 $W$ 通过对称变换形成的多边形，用字母 $S$ 表示．把数字 0、1、2、3 分别换成 3、2、1、0，就得到多边形 $S$ 的符号：

$$231210231210. \qquad (S)$$

多边形 $S$ 按相反方向绕行的符号用$(S')$表示，把符号$(W)$倒过来，就得到符号$(S')$：

$$321201321201. \qquad (S')$$

多边形 $W$ 按相反方向绕行的符号用$(W')$表示，把符号$(S)$倒过来，就得到符号$(W')$：

$$012132012132. \qquad (W')$$

容易证明，任意满足题目条件的多边形的符号中，不能接连出现两个 0 或两个 3(因为这将出现三角形环路)．而多边形 030303030303 也不满足题目的条件(见图 99)，所以在每

个符合题目条件的多边形中，至少要出现一个1或一个2. 当出现数字2时，我们把多边形 $W$ 用对称的多边形 $S$ 代替，就只限于列举符号中含有数字1的那种多边形就可以了. 其余的多边形(如果存在的话)可以通过对称变换得出. 现在我们证明，如果适合题目条件的多边形符号中，含有数字1，那末它必定含有数字组10或01，或者数字组23或32(当对称的多边形含有数字组10或01).

事实上，如果数字1不出现在数字组10或01中，那末必定出现于数字组111, 112, 113, 212, 213, 313中的一个，或者出现于把上述数字组倒过来所得数字组中的一个. 在后一种情况，把多边形 $W$ 用多边形 $S'$ 代替，我们只研究第一种情况就可以了.

如果多边形 $W$ 适合题目条件，数字组111就不可能出现，因为这时顶点 $e$ 将不可能属于多边形 $W$(图100).

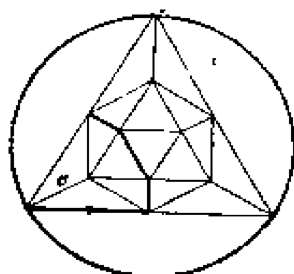


图 100

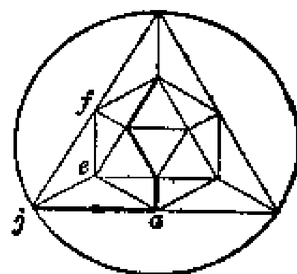


图 101

如果出现数字组112(或113)，就必须存在连线 $fej$(图101)，其中顶点 $j$ 对应数字0，顶点 $a$ 对应数字1，于是数字组01出现在多边形的符号中(这一段可以这样理解：如果出现数字组112，则有图101中的粗线路径，这时顶点 $e$ 只能跟 $f$ 与 $j$ 连接，因为周围其他三个顶点已有粗线经过. ——译者).

如果出现数字组 212(或 213)，就必定存在连线 $cbe$(图 102)．如果顶点 $e$ 与顶点 $f$ 连接，那末折线 $febc$ 在多边形的符号中，将对应数字组 10．如果顶点 $e$ 与顶点 $j$ 连接，那末折线 $beja$ 在多边形的符号中，将对应数字组 10．

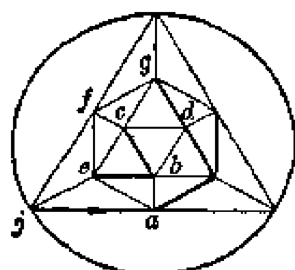



图 102

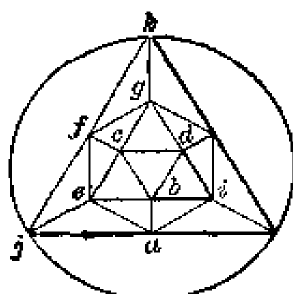



图 103

最后，如果出现数字组 313，就必须出现连线 $bid$(图103)．顶点 $j$ 与 $k$ 不可能直接连接，也不可能分别与顶点 $f$ 连接(否则将出现环路．——译者)，因而必定有连线 $je$ 或 $kg$．由于对称性，我们限于研究第一种情况．可以看出，这时顶点 $e$ 与 $b$ 的连线有下面三种可能：$eb$，$ecb$ 或 $efcb$．在连线 $eb$ 的情况，折线 $beja$ 在多边形 $W$ 的符号中对应数字组 10，而在连线 $ecb$ 或 $efcb$ 的情况，折线 $dibc$ 在多边形符号中对应数字组 32．

这样，我们证明了，如果在多边形符号中出现数字 1，就必定出现数字组 10 或 01，或者 23 或 32．因此，在必要时，可以用多边形 $S$ 代替多边形 $W$，相应地，用符号$(S)$代替$(W)$，$(S')$ 代替 $(W')$，就只限于列举这样的多边形就可以：它经过任意选定的一条棱，并且它的符号的开头是数字组 10．其余的多边形(如果存在的话)可以通过对称变换得出．

列举上述多边形的方法有两种．第一种方法跟讨论十二面体所用的方法相似，以研究图形的一切可能情况为基础．另

一种方法是先作开头三个顶点的组合，然后作六个顶点的组合，使得经过这些顶点可以作出所研究的多边形。每一种方法都得出下列多边形(详细过程略)：

[1] 102123102123
[2] 102132013023
[3] 102132020313
[4] 102230130132
[5] 102230202303
[6] 102230203032
[7] 102230210322
[8] 102301320123
[9] 102302301132
[10] 102303030132
[11] 102303102303
[12] 102303103032
[13] 102303110322
[14] 102310231023
[15] 102310320132
[16] 102312013203
[17] 102312102312

[18] 103022301123
[19] 103023030123
[20] 103023103023
[21] 103023110313
[22] 103030320123
[23] 103031301132
[24] 103032030132
[25] 103032102303
[26] 103032103032
[27] 103032110322
[28] 103103220123
[29] 103123011231
[30] 103130301231
[31] 103131030231
[32] 103131103131
[33] 103201321023
[34] 103203201231
[35] 103213011321
[36] 103220123103
[37] 103220301321
[38] 103221023031
[39] 103221022302
[40] 103221030321
[41] 103221103221

现在还要从上面的多边形中，去掉那些与另一个多边形相同的多边形，并且添上利用对称得出的而与上面的多边形不同的多边形。

可以立刻看出，多边形[25]与[12]相同，我们用等式表示，[25]=[12]，同样的，[31]=[21]，[33]=[15]，[36]=[28]，[38]=[13]，[39]=[7]，[40]=[27]。

去掉多边形[25]，[31]，[33]，[36]，[38]，[39]，[40]，剩下还有 34 个多边形，它们的符号如下表：

| (W) | (S) | (W′)<br>((S)倒过来读) | (S′)<br>((W)倒过来读) |
|---|---|---|---|
| [1] | [17] | | |
| [2] | [16] | [2] | [16] |
| [3] | [42] 231201313020 | [3] | [42] |
| [4] | [34] | [9] | [28] |
| [5] | [21] | | |
| [6] | [30] | [23] | |
| [7] | [29] | [35] | |
| [8] | [15] | [8] | [15] |
| [10] | [22] | [10] | [22] |
| [11] | [20] | | |
| [12] | [19] | [24] | |
| [13] | [18] | [37] | |
| [14] | [14] | | |
| [26] | [43] 230301230301 | [26] | [43] |
| [27] | [44] 230301223011 | [27] | [44] |
| [32] | [45] 230202230202 | | |
| [41] | [46] 230112230112 | [41] | [46] |

从这张表看出，多边形[9]，[28]，[23]，[35]，[24]，[37]分别与多边形[4]，[34]，[6]，[7]，[12]，[13]相同；把多边形[3]，[26]，[27]，[32]，[41]分别进行对称变换，得到新的不同于以前已讨论过的多边形(这几个多边形即[42]～[46]，表中已经写出它们的符号。——译者)。

因此，对于二十面体，本题有33个解：一个对称多边形[14]，16个多边形[1]，[2]，[3]，[4]，[5]，[6]，[7]，[8]，[10]，[11]，[12]，[13]，[26]，[27]，[32]，[41]及分别与它们对称的16个多边形：[17]，[16]，[42]，[34]，[21]，[30]，[29]，[15]，[22]，[20]，[19]，[18]，[43]，[44]，[45]，[46]。

其中，多边形[2]，[16]，[3]，[42]，[8]，[15]，[10]，[22]，[26]，[43]，[27]，[44]，[41]，[46]把二十面体的表面分为全等的两部分。

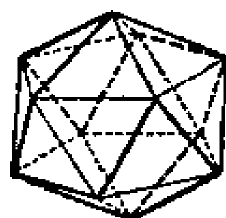


图 104

图 104 表示解[14]，图 105 画出上表中($W$)列除[14]外的其余 16 个解，对称的解没有画出。每个多边形都从最下面的顶点开始绕行，图 105 中各个解按横行的顺序排列。

**45.** 题中所述的三个圆锥形行星模型，可以用下面的方法得出：画一个经纬线的直角网(图 106)，按照图 107 所示的

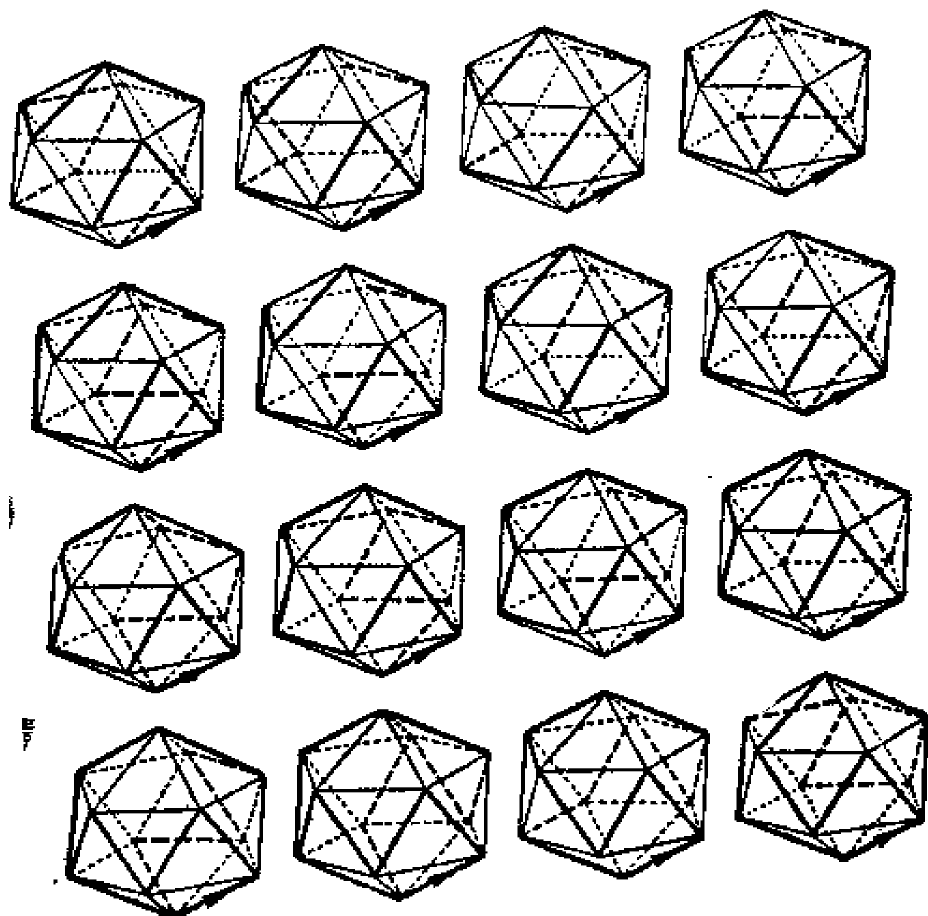


图 105

三种方法的一种剪去空白部分，然后把剩下部分卷在以点 $N$ 为顶点的圆锥上.

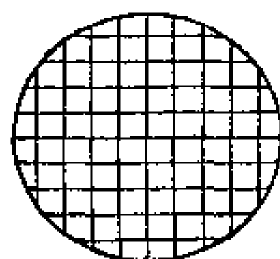


图 106

图 108 是第一个圆锥“从上面”(即从顶点方向)看去的图形. 我们能够明显地区分出两族曲线:“经线”与“纬线”. 经线互不相交，纬线也互不相交. 与地球上一样，每一条经线与每一条纬线相交于两点. 两点间的最短路径有恒定的方向，即同纬线与经线都分别交成定角.

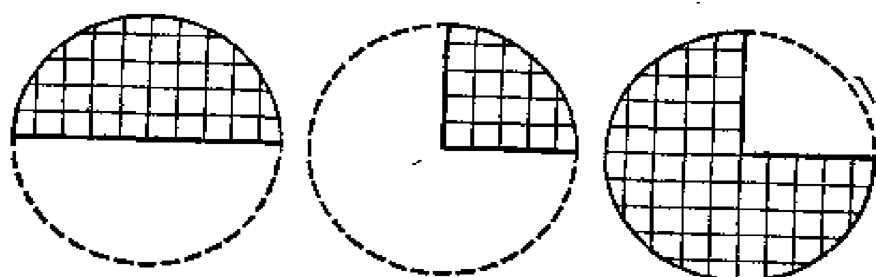


图 107

图 109 与图 110 是第二个与第三个圆锥“从上面”看去的图形，也就是曲线族在垂直于圆锥轴的平面内的投影. 第二个圆锥(图 109)只有一族曲线，第三个圆锥(图 110)有三族曲线.

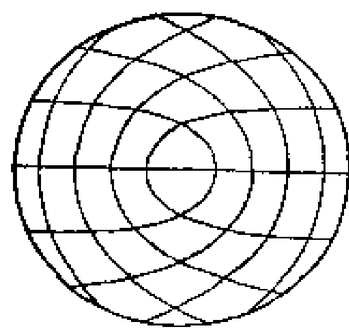


图 108

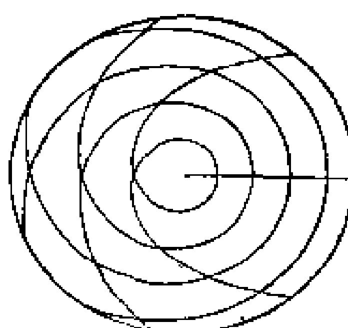


图 109

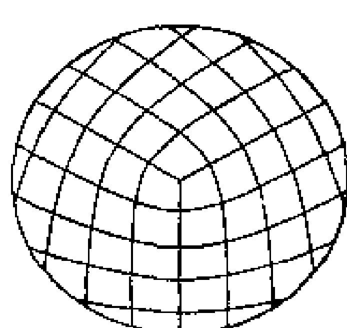


图 110

值得注意的是，上面举出的解并不是唯一的.

**46**. 如果半径为 $r$ 的四个球按题目条件堆垒，那末，它们的球心形成一个正四面体，棱长为 $2r$(图 111 左). 从等式 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ 不难求出两面角 $\alpha\approx70°32'$.

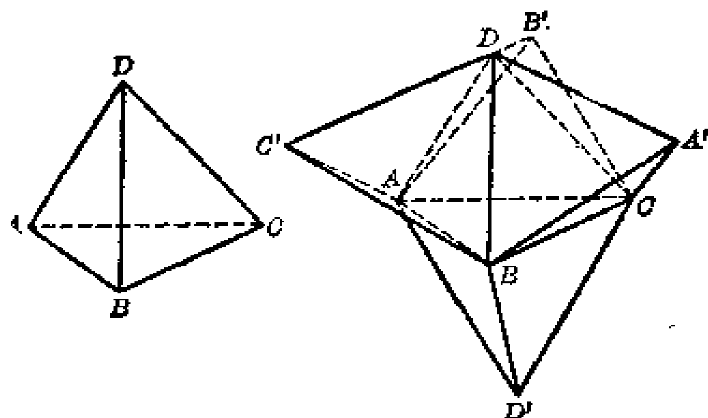



图 111

如果我们要继续作出球心形成的多面体，就要在上面已形成的凹穴上放上新的球，相应地，就要在上面已作的四面体上，添加与这四面体关于它的一个面对称的四面体. 因为凹穴总共有四个，所以要放四个球，相应地，在四面体上添加四个四面体. 因而我们得到一个星状多面体，画在图 111 的右面. 它有十二个面，所以由球组成的形体有 12 个凹穴.

如果我们现在想在每一个已形成的凹穴上再放一个球，就要证明所有的球并不相交(这里所谓相交，就是一个球的一部分在另一个球的内部，本题研究球的堆垒当然不允许相交.——译者). 事实上，如果在面 $A'BC$ 上添加四面体 $A'BCD''$，在面 $BCD'$ 上添加四面体 $A''BCD'$，那末，实际上这个作图是可以完成的，因为 $5\alpha<360°$. 但是添加的两个四面体的顶点之间距离 $A''D''$ 等于 $2r\sqrt{3}\sin\left(180°-\frac{5}{2}\alpha\right)\approx\frac{2}{9}r<2r$. 所

以点 $A''$ 与 $D''$ 不可能同时作为半径为 $r$ 的球的球心.

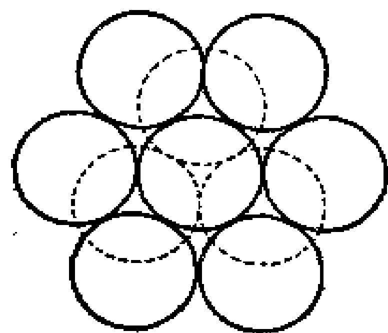
这样一来，每一对凹穴（在星状多面体每一条靠里面的棱的附近）只能在其中一个凹穴放上一个新的球，也就是说，第三层总共只有六个球. 这一个球事实上是放得下的，因为（例如这个球的球心是 $A''$）：

$$A'A''=2r\sqrt{3}\sin 2\alpha\approx\frac{8\sqrt{6}}{9}r>2r.$$

下面我们常常把"凹穴"说成"面"，把"球心"说成"顶点". 假设：面 $A'BD$, $B'CD$, $C'AD$, $ABD'$, $BCD'$, $ACD'$ 上各放一个球，这些面我们叫做"活面"，其余的面上没有放球，我们称它们为"死面".

这时，在已知多面体上可以添加四面体 $A'BDG$, $B'CDE$, $AC'DF$, $ABC''D$, $A''BCD'$, $AB''CD'$，总共增加了十八个面. 后三个四面体每个只有一个"活面"，前三个四面体同样的每个只有一个"活面"，也就是说，第四层总共是六个球.

这个过程当然可以继续下去. 每联成新的一层球以后，球心所形成的多面体的某些面将"死去"，而其余的"活面"又将生长出新的四面体.


图 112

**47.** 设 $r$ 表示已知球的半径.

首先，我们注意到，一个球外面可以放上六个球，使每个球都同第一个球（这个球我们认为是第一层）相切，每相邻两个球也相切，并且所有的球心在一个平面内（图 112）. 这七个球中每三个相切的球形成的凹穴，共有十二个. 我们把图 112 所画的平面，作为经过这七个球的球心的平面，在这个平面上面的凹穴，我们只能放三个

与第一层相切的球，这些球在图 112 中用虚线表示．容易确信，它们球心之间的距离等于 $2r$，所以这三个球是容纳得下的．平面下面的凹穴也只能容纳三个球，但是有两种放法：或者各放在上面凹穴中三个球的正下方，或者各放在这三个球中间的下方．

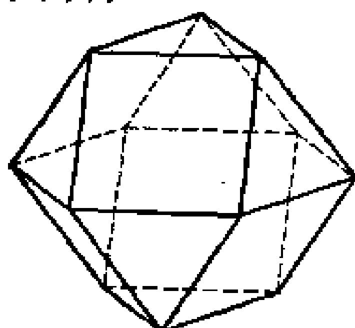


图 113

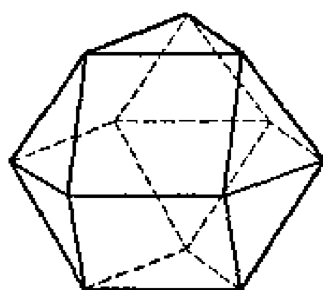


图 114

这样，在一个球外面可以用两种方法放上 12 个球，形成第二层．这十二个球的球心，是两个十四面体 $W_1$ 与 $W_2$ 的顶点(图 113 与 114)，它们各有六个面是正方形，八个面是等边三角形，正方形与三角形的边长都等于 $2r$．因为第二层球的球心到第一层球的球心的距离都一样，所以十四面体 $W_1$ 与 $W_2$ 的顶点到第一层球的球心的距离，也都相等，这个距离等于 $2r$．由此可以计算多面体 $W_1$ 与 $W_2$ 的两面角．事实上，我们把多面体的顶点同第一层球的球心连接起来，就把两个多面体各分为六个正四棱锥(棱长等于 $2r$)与八个正四面体(棱长等于 $2r$)．正棱锥靠底面处的两面角记作 $\alpha$，正四面体的两面角记作 $\beta$，容易求出

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=\frac{1}{3},$$

因此
$$\alpha=54^\circ 44',\quad \beta=70^\circ 32'.$$

多面体 $W_1$ 的两面角都等于 $\alpha+\beta$．多面体 $W_2$ 的两面角，在

两个三角形面之间为 $2\beta$，在两个正方形面之间为 $2\alpha$，在三角形面与正方形面之间为 $\alpha+\beta$.

球心分别为十四面体 $W_1$ 与 $W_2$ 的顶点的两组球，各有 14 个凹穴：八个凹穴是由三个球形成，六个凹穴由四个球形成. 容易确信，每一个凹穴可以容纳一个球(这怎样证明?). 所以第三层由 14 个球组成. 因为图 115 的星状多面体 $W_1^*$ 有 48 个面，那末以这个多面体的顶点为球心的第三层球，形成 48 个凹穴. 但是，任何一个凹穴都已经不可能再放上球了(为什么?).

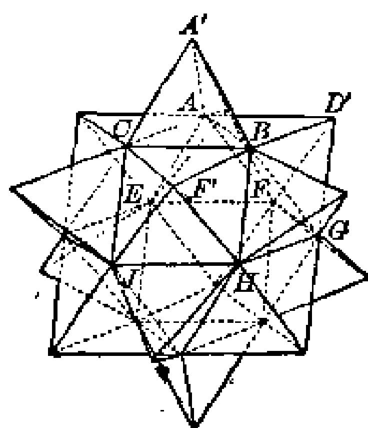


图 115

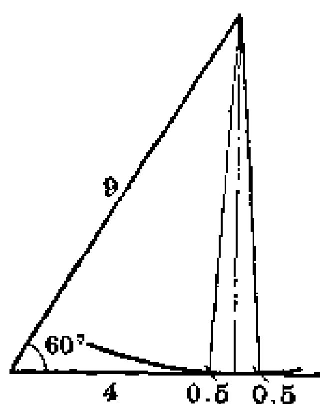


图 116

我们再研究另一组以十四面体 $W_2$ 的顶点为球心的球，以及由多面体 $W_2$ 作成的星状多面体 $W_2^*$. 这时，第三层球组的凹穴可以放三个球，形成第四层. 但是与上面一样，在凹穴上放球到此为止，我们已经不能再放第五层球了.

**48**. 本题解答可以由图 116 说明. 作者在课本上写的 4 cm，排字工人把它排成 5 cm.

**49**. 大多数城市的电灯是用每秒 50 周的交流电. 每秒钟电灯光亮 100 次、暗 100 次，而两个相邻的最高电压(正负不计——译者)的时间间隔都是 0.01 秒.

如果圆盘以每秒 25 转的速度，按顺时针方向旋转，那末在 0.01 秒内，圆盘内部的每一部分都转了 0.25 圈，每种颜色的部分所处的位置与原来的一样，因此我们看起来，圆盘内部没有旋转．当旋转的速度略超过每秒 25 转，我们就会看见圆盘好象以顺时针方向旋转，而当旋转速略少于每秒 25 转，我们就会看见圆盘似乎以反时针方向旋转．

对于外面的圆环也是一样，不过临界的速度等于每秒 20 转．

现在我们假设，圆盘以很高的速度旋转．当圆盘速度降低到每秒 25 转时，那末我们看起来，圆盘的内部似乎不动，而外面的圆环则按顺时针方向旋转．当圆盘的速度每秒小于 25 转而大于 20 转时，那末我们看到似乎圆盘内部以反时针方向旋转，而外面的圆环以顺时针方向旋转．当圆盘速度为每秒 20 转时，则圆环不动，速度继续降低时，圆盘内部与外面的圆环都以反时针方向旋转．

这个玩具最好在日光灯下使用，而在普通的大功率电灯下效果是很不好的，因为它的灯丝有很大的热能，不能在一个周期内给出鲜明的对照．

**50**．争执可以用下面的方法解决．

首先，让第三个人选择一块火腿．当然，她选择的那块必定不轻于其余任意的一块，所以从她看来，这一块价格不小于 15 卢布．这样的一块一定存在，因为把整体分为三部分，其中总有一部分不小于整体的三分之一．

然后让第二个人选择．她也会是满意的，因为第三个人拿去一块后，余下至少有一块按商店称得的重量计价，不小于 15 卢布．

第一个人得到余下的一块，她也是满意的，因为她认为三

块的重量都相等.

**51**. 任意两条互相垂直的直线简称十字形. 我们把其中一条射线作上标志(在图117上用箭头表示). 在平面区域上任意放置的十字形,总可以把它平行移动,使与射线毗邻的那两部分区域的面积各等于$\frac{P}{4}$(图117上十字形用虚线表示,十字形上部两个面积各为$\frac{P}{4}$的区域,用斜虚线表示). 如果下部两个区域的面积也都是$\frac{P}{4}$,定理就得证.

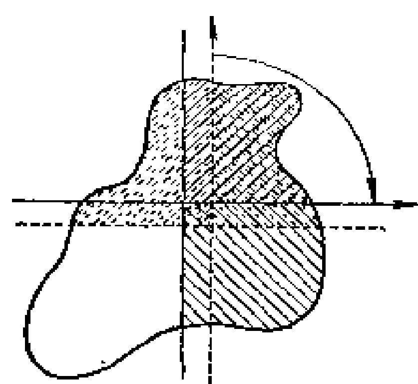


图 117

假设不是这样,比方说,左下部分的面积大于$\frac{P}{4}$(因而它大于右下部分的面积). 现在我们把十字形按顺时针方向旋转,总能使与有标志的射线毗邻的两部分面积各等于$\frac{P}{4}$. 十字形旋转90°以后,成为图117实线的位置. 要使斜实线的两部分的面积都等于$\frac{P}{4}$,垂直线应向左移动,水平线应向上移动. 在十字形新的位置中,左下部分(相对作上标志的射线)(注意:这里作上标志的射线已成为水平线,因而所谓左下部分实际上是图117的左上部分!——译者)的面积小于$\frac{P}{4}$,因为它只是(向右上斜的)虚线表示的区域的一部分,而这斜虚线表示的区域的面积是$\frac{P}{4}$. 因此右下部分(在图117上实际是左下部分!——译者)的面积大于$\frac{P}{4}$. 这样,我们得到与十字形原来位置相反的情况,所以旋转十字形时,必定可以找

到这样的位置：所有四部分有相同的面积，都等于 $\frac{P}{4}$（这里要用到当十字形转动时，左下区域的面积变化的连续性. ——译者）.

上面关于把饼分成四个相等部分的可能性的证明，不需要任何计算. 但是，要把一个已知三角形（例如边长分别为 3、4、5）分成四个相等的部分，计算就必不可少，而且还是相当的复杂.

**52**. 首先我们注意到，如果巴维尔取三角形重心作为点 $P$（图 118），那末对加维尔来说，最好的办法是沿着平行于三角形任意一边的直线切开蛋糕. 要证明这个事实，我们只要证明图 118 上有斜线的三角形的面积，小于重迭斜线的三角形的面积就可以了（图上 $BC \parallel AD$，过 $B$、$C$ 分别作 $BC$ 的垂线，可以证明两三角形面积不等. ——译者）. 蛋糕 $ABCD$ 部分的面积等于整个蛋糕面积的 $\frac{5}{9}$，所以，加维尔与巴维尔所得蛋糕的比为 5:4.

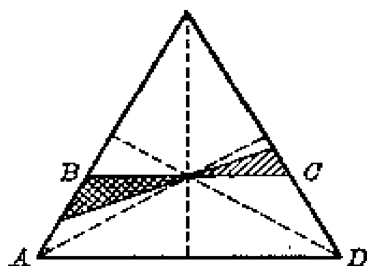


图 118

容易验证，巴维尔选择重心作为点 $P$ 是他最好的办法，因为当点 $P$ 选在任何其他位置时，加维尔不仅切得梯形 $ABCD$，而且还得到它上面的一块蛋糕（图 119）.

剩下的问题，我们请读者自己回答. 容易证明，如果蛋糕有图 120 那样奇怪的形状，那末不论点 $P$ 怎样取法，加维尔至少总可以切得蛋糕的 $\frac{2}{3}$. 最后，建议读者利用第 51 题的结果证明：不论蛋糕的形状怎样，加维尔取得的蛋糕不能大于整个的 $\frac{3}{4}$（巴维尔先适当地选好点 $P$. ——译者）.

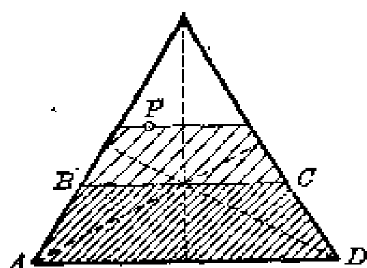



图 119

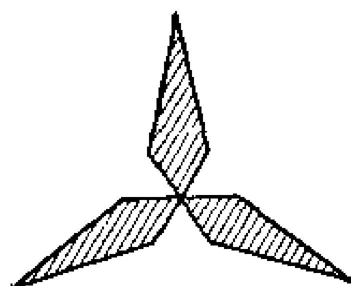


图 120

**53**. 从旅行家的路径记录，他的帐篷架设在北极．在那里，一年只有一次日出，就是在春分那天，即 3 月 21 日，这就是涅维亚多姆斯的生日．

**54**. 依次用 I, II, …, VII 表示星期数（这里 I 不一定代表星期一，比方说 I 也可以代表星期三，这时 II 代表星期四，…，VII 代表星期二．——译者）．我们约定，1911 年某确定的一天的星期数是 I，编制下面的表：

| A | B | C | D | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1911 | I | I | | 1931 | V | V | |
| **1912** | II | III | I | **1932** | VI | VII | V |
| 1913 | IV | IV | | 1933 | I | I | |
| 1914 | V | V | | 1934 | II | II | |
| 1915 | VI | VI | | 1935 | III | III | |
| **1916** | VII | I | | **1936** | IV | V | III |
| 1917 | II | II | | 1937 | VI | VI | |
| 1918 | III | III | | 1938 | VII | VII | |
| 1919 | IV | IV | | 1939 | I | I | |
| **1920** | V | VI | IV | **1940** | II | III | I |
| 1921 | VII | VII | | 1941 | IV | IV | |
| 1922 | I | I | | 1942 | V | V | |
| 1923 | II | II | | 1943 | VI | VI | |
| **1924** | III | IV | | **1944** | VII | I | VI |
| 1925 | V | V | | 1945 | II | II | |
| 1926 | VI | VI | | 1946 | III | III | |
| 1927 | VII | VII | | 1947 | IV | IV | |
| **1928** | I | II | VII | **1948** | V | VI | IV |
| 1929 | III | III | | 1949 | VII | VII | |
| 1930 | IV | IV | | 1950 | I | I | |

表的 $A$ 列是年份(闰年用粗体字排印). $B$ 列是不同年份中与 1911 年某天的月、日相同的那天的星期数(如果这一天在 1 月 1 日到 2 月 28 日之间). $C$ 列也是不同年份的那一天的星期数(如果这一天是在 3 月 1 日到 12 月 31 日之间). $D$ 列是各闰年的 2 月 29 日的星期数.

从表中看出,如果确定的一天在 3 月 1 日之前,那末平年的下一年,星期数是这一年的星期数加 1,闰年下一年,星期数加 2. 如果确定的一天在 3 月 1 日之后,那末,平年的前一年,星期数减 1,闰年的前一年,星期数减 2.

在这个表中还可以看出,如果确定的一天(不是 2 月 29 日)在某一年中例如是星期一,那末,第二次月、日、星期都与这一天一样,或者要经过 5 年,或者要经过 6 年或者经过 11 年才出现(如果所考察的周期中,没有被 100 整除而不能被 400 整除的年份)(因为这样的年份不是闰年而是平年,但是这个表中没有这样的年份.——译者).

如果索菲亚·谢尔盖夫娜出生于 1950 年 7 月 27 日之前(但不是 2 月 29 日),并且只庆祝过一次生日,那末庆祝生日的这天她还未成年(因为根据上段所述,她将不大于 11 岁.——译者),所以没有理由叫她做索菲亚·谢尔盖夫娜,同样也不能说她还不老.

所以,我们推知索菲亚·谢尔盖夫娜生于 2 月 29 日. 这个日期的星期数每经过 4 年增加 5,因而 2 月 29 日这个日期,每隔 $7\cdot4=28$ 年星期数相同(如果这个周期中没有能被 100 整除而不能被 400 整除的年份). 因为索菲亚·谢尔盖夫娜"才一岁",所以她第一次庆祝生日最早在 1920 年,最迟在 1948 年.

而由于已知索菲亚·谢尔盖夫娜是第一次世界大战以后

出生的，所以她第一次庆祝生日是在1948年，而出生于1920年2月29日。

**55**．设池塘中适于捕捞的鱼的条数为$n$．这时，做上记号的鱼数与全体鱼数的比等于$\frac{30}{n}$.

第二次，捕获40条鱼，其中有两条鱼是做上记号的．有记号的鱼数与捞获的鱼数的比等于$\frac{1}{20}$.

如果我们假设，有记号的鱼在池塘的所有的鱼中间是均匀分布的，那末上面两个比应该相等，即

$$\frac{30}{n}=\frac{1}{20},$$

由此，$n=600$.

所以，池塘中适宜于用给定的网捕捞的鱼，近似地等于600条.

**56**．如果采用下面的方法，任何情况下都只要试验4次就可以了．先把小轴与中间的孔(就是按大小排列的第八个孔)比较，然后根据比较的结果，再与第四个孔或第十二个孔比较，等等．每次试验结果将有回答“是”(如果小轴能通过小孔)或“不是”(如果小轴不能通过小孔)．4次试验共有16种可能，所以这个工具把小轴分成十六类.

**57**．如果$2n$个数$x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$按递增次序排列，且$x_m<x<x_{m+1}$，那末，当用$x$代$x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$，绝对误差的和等于

$$(x-x_1)+(x-x_2)+\cdots+(x-x_m)+(x_{m+1}-x)+\cdots+(x_{2n}-x). \qquad (1)$$

容易验证，形如(1)的最小的数是

$$(y-x_1)+(y-x_2)+\cdots+(y-x_n)$$
$$+(x_{n+1}-y)+\cdots+(x_{2n}-y). \qquad (2)$$

这里 $x_n<y<x_{n+1}$. 事实上，如果 $m>n$(所以 $x>y$)，那末数(1)与(2)的差等于

$$\begin{aligned} n(x-y)&+[(x-x_{n+1})+\cdots+(x-x_m)] \\ &-[(x_{n+1}-y)+\cdots+(x_m-y)] \\ &+(2n-m)(y-x)>n(x-y)+0 \\ &-(m-n)(x-y)+(2n-m)(y-x)=0. \end{aligned}$$

同理，可以验证，如果 $4n$ 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_{4n}$ 分为两部分：

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{2m}, \quad 与 \quad x_{2m+1},\ x_{2m+2},\ \cdots,\ x_{4n},$$

第一部分的数用 $x'$ 代替，且 $x_m<x'<x_{m+1}$; 第二部分的数用 $x''$ 代替，且 $x_{2n+m}<x''<x_{2n+m+1}$，那末，当 $m=n$ 时绝对误差的和为最小.

由此得出，120 个钢珠的临界直径是 6.09 mm(有 60 个钢珠的直径小于 6.09 mm, 60 个钢珠的直径大于 6.09 mm)，在箱子上分别写着：$a=6.06$ mm, $b=6.15$ mm.

**58.** 小轴的横截面面积等于 $25\pi$ cm$^2$，其中带子所占的面积等于 25 cm$^2$，所以中心管子部分的面积是 $25(\pi-1)$cm$^2$. 设管子(没有带子)的直径为 $d$，这时从方程

$$\pi\frac{d^2}{4}=25(\pi-1)$$

得到
$$d=10\sqrt{\frac{\pi-1}{\pi}}\text{ cm}\approx 8.26\text{ cm}.$$

**59.** 大家知道，时钟表示的时间，只用由一枚短针在钟面上所指的刻度数(坐标)就可以完全确定，长针只不过起辅助作用，它好象是钟面上的一个游标，可以把短针坐标的精确度

提高十二倍.

如果短针在钟面上的坐标记作 $\xi$，长针的坐标记作 $\eta$，我们得到：

$$\eta-12\{\xi\}=0,\ 0\leqslant\xi\leqslant12,\ 0\leqslant\eta<12,$$

这里 $\{\xi\}$ 表示数 $\xi$ 的小数部分.

假设时钟的两枚针一样长. 我们用 $x$ 表示一枚针的坐标，$y$ 表示另一枚针的坐标.

图 121

可能发生三种情况：

(1) 如果

$$x-12\{y\}\neq0,$$

那末必定有

$$y-12\{x\}=0,$$

这时时钟表示时间 $x$.

(2) 如果

$$y-12\{x\}\neq0,$$

那末必定有

$$x-12\{y\}=0,$$

这时时钟表示时间 $y$.

(3) 如果同时有等式

$$y-12\{x\}=0 \quad 与 \quad x-12\{y\}=0$$

成立，那末根据两针一样长的时钟，我们不能读出时间，因为每枚针都可以看作短针，所以时间可能是 $x$ 也可能是 $y$，两针这样的特殊的位置共有 143 个.

适合这种情况的数 $x$、$y$，就是函数 $y=12\{x\}$ 与 $x=12\{y\}$ 的图象的 143 个交点的坐标(图 122). 这

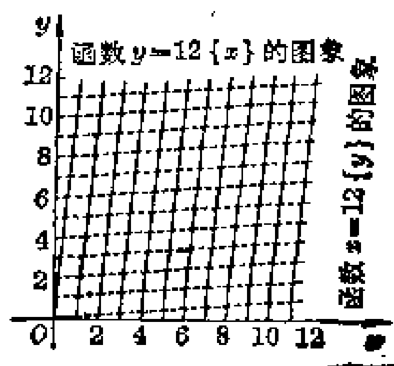



图 122

些点在由方程

$$y=x+\frac{12}{13}k \quad (k=0,\ \pm1,\ \cdots,\ \pm11) \qquad (1)$$

确定的 23 条直线上.

如果现在我们用

$$r=|x-y|$$

表示误差，这个误差是由于时钟所指的两个时间($x$ 与 $y$)中，用其中一个代替另一个而产生的，那末根据等式(1)，有

$$r=\frac{12}{13}|k| \quad (k=0,\ \pm1,\ \cdots,\ \pm11).$$

根据题目条件，去掉大于 6 小时的误差，我们得到最大误差：当 $k=\pm6$，$r=\frac{72}{13}=5\frac{7}{13}$，即 5 小时 32 分 $18\frac{6}{13}$ 秒.（在什么时间达到这么大的危险的误差？）当然，在上面的推理中，我们假定时钟主人正确无误地读出两针的坐标.

**60.** (1) 可能发生最矮的高个子与最高的矮个子是同一个儿童．特别是，由 $km$ 个身长都不同的学生组成的班级($k$ 与 $m$ 是大于 1 的自然数)，可以排成一个 $k$ 列 $m$ 行的长方形队伍，使任意指定的一个学生 $u$，如果至少有 $k-1$ 个同学比他矮，并且至少有 $m-1$ 个同学比他高，就可以使这个学生 $u$ 同时是最矮的高个子和最高的矮个子：

1　2　3 ········ $k$

1

2

3　　　　(身长大于 $u$)

⋮　(身长小于 $u$)　$u$　(身长小于 $u$)

　　　　(身长大于 $u$)

$m$

(2) 没有这样的班级，它的最矮的高个子矮于最高的矮个子.

为了证明这一点，我们用 $u$ 表示最高的矮个子，$U$ 表示最矮的高个子（$u$、$U$ 同时代表其身长. ——译者）. 假定 $U<u$，学生 $u$ 与 $U$ 不可能站在同一行（因为这时 $u$ 不是这一行的最矮者），也不可能站在同一列（因为这时 $U$ 不是这一列的最高者）. 设学生 $u$ 所在的列与学生 $U$ 所在的行的交点处的学生是 $u_{ik}$，我们得到

$$u<u_{ik},\quad u_{ik}<U;$$

因此 $u<U$，这与上面的假定 $U<u$ 相反. 所以，$U<u$ 的假定导致矛盾，因而它是不正确的.

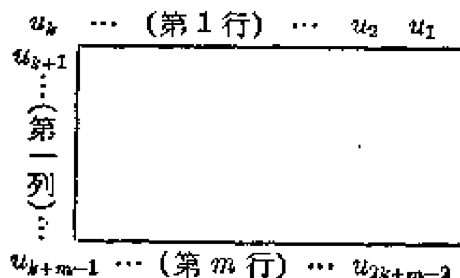
(3) 如果教师确定高个子的方法与确定矮个子的一样，也就是在每一列而不是在每一行中找，那末，十分明显，同一个学生，不可能既是最矮的高个子又是最高的矮个子，因为否则的话，他在自己的列中就将同时是最矮者与最高者，这是不可能的.

但是，在这种情况，最矮的高个子可能或者高于或者矮于最高的矮个子.

事实上，从有 $km$ 个不同身长的学生的班级中，完全任意地选出 $2k+m-2$ 个学生，按身长的递减顺序

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_{2k+m-2}$$

以下面的形式排列在长方形的三条边上：



其余的学生完全任意地在中间排成长方形队伍.

学生 $u_k$ 是最矮的高个子，学生 $u_{k+m-1}$ 是最高的矮个子. 因为 $u_k > u_{k+m-1}$，所以最矮的高个子高于最高的矮个子.

如果 $k+2m-2$ 个学生按身长的递减顺序

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_{k+2m-2}$$

排成

$u_1$ ⋮ (第1列) ⋮ $u_m$　　$u_{2m+k-2}$ ⋮ (第 $k$ 列) ⋮ $u_{k+m-1}$

$u_m\ u_{m+1}\ \cdots$ (第 $m$ 行) $\cdots\ u_{k+m-1}$

而其余的学生完全任意地在中间排成长方形队伍，那末学生 $u_{k+m-1}$ 是最矮的高个子，学生 $u_m$ 是最高的矮个子，由不等式 $u_{k+m-1} < u_m$ 得出：最矮的高个子矮于最高的矮个子.

**61.** 题目所提的问题用相应的问题号码表示，用符号 $p \to q$（蕴涵）表示：由对问题 $p$ 回答"是"，可推出对问题 $q$ 回答"是". 这时下列的蕴涵是正确的：

$$1\to2,\ 1\to3,\ 1\to4,\ 1\to7,\ 1\to8,$$
$$1\to10,\ 1\to11,\ 1\to12,\ 1\to13,$$
$$2\to4,$$
$$3\to7,$$
$$4\to2,$$
$$5\to7,$$
$$6\to2,\ 6\to4,\ 6\to9,$$
$$7\to3,$$
$$8\to3,\ 8\to7.$$

这样，问题 2 与 4 的回答是相同的，问题 3 与 7 的回答也

是相同的.

**62.** 题目所说的记号有下面十六种:

(1) $abcd$, (9) $ab'cd'$,

(2) $abcd'$, (10) $a'bc'd$,

(3) $abc'd$, (11) $a'bcd'$,

(4) $ab'cd$, (12) $ab'c'd'$,

(5) $a'bcd$, (13) $a'bc'd'$,

(6) $abc'd'$, (14) $a'b'cd'$,

(7) $ab'c'd$, (15) $a'b'c'd$,

(8) $a'b'cd$, (16) $a'b'c'd'$.

我们证明，这16种记号中有两种，即 $ab'c'd$ 与 $a'bcd'$ 不能用来表示火车.

吸烟的旅客在供吸烟者用的车厢中的人数，用符号 $P_p$ 表示；吸烟的旅客在供不吸烟者用的车厢中的人数，用 $P_n$ 表示；不吸烟的旅客在供吸烟者用的车厢中的人数，用 $N_p$ 表示；不吸烟的旅客在供不吸烟者用的车厢中的人数，用 $N_n$ 表示.

我们研究记号 $ab'c'd$. 字母 $a$、$b'$、$c'$、$d$ 对应的意义是满足下列不等式:

$$P_p>P_n,\ N_p<N_n,\ P_p<N_p,\ P_n>N_n. \qquad (1)$$

由前三个不等式得出:

$$N_n>N_p>P_p>P_n,$$

所以，$N_n>P_n$，这与不等式(1)中的第四个不等式矛盾.

记号 $ab'c'd$ 是矛盾的，所以它不能用来表示火车.

记号 $a'bcd'$ 也是矛盾的，因为它所确定的不等式

$$P_p<P_n,\ N_p>N_n,\ P_p>N_p,\ P_n<N_n$$

的前三个与第四个矛盾.

剩下的十四个记号可以用来表示火车，这一点可从下面

的直观表得出：

| 火车号码 | 记　号 | 旅客在车厢中的分布 | |
|---|---|---|---|
| | | 供吸烟者使用的车厢 | 供非吸烟者使用的车厢 |
| 1 | $abcd$ | PPP NN | PP N |
| 2 | $abcd'$ | PPPP NNN | P NN |
| 3 | $abc'd$ | PPP NNNN | PP N |
| 4 | $ab'cd$ | PPPP N | PPP NN |
| 5 | $a'bcd$ | PPP NN | PPPP N |
| 6 | $abc'd'$ | PP NNN | P NN |
| 8 | $a'b'cd$ | PP N | PPP NN |
| 9 | $ab'cd'$ | PP N | P NN |
| 10 | $a'bc'd$ | P NN | PP N |
| 12 | $ab'c'd'$ | PP NNN | P NNNN |
| 13 | $a'bc'd'$ | P NNNN | PP NNN |
| 14 | $a'b'cd'$ | PP N | PPP NNNN |
| 15 | $a'b'c'd$ | P NN | PPPP NNN |
| 16 | $a'b'c'd'$ | P NN | PP NNN |

**63**. 元、角、分的钱币票面值同样地都分为 1、2、5 三种．这样一来，解答本题只要研究：和为从 1 元到 9 元每一整数元，各必定包含多少种不同整数元的和．结果由下表说明：

| 元数的和 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 必定包含的元数的和 | 1 | 2 | 1，2，3 | 2，4 | 5 | 6 | 2，5，7 | 2，6，8 | 2，4，5，7，9 |

（这张表的意义举例说明如下：如果你有 7 元钱，那末不许换小票、也不许找补，你必定可以直接拿出 2 元，或 5 元或 7 元，但是不一定能直接拿出 6 元，因为如果你的 7 元钱可能是一张 5 元币与一张 2 元币，所以 7 元中不一定包含和为 6 元的钱币．同理，7 元中也不一定包含和为 1 元、3 元、4 元的钱

币．——译者）

利用这张表，我们可以计算，在已知的和中必定包含多少种不同的和．例如有钱币和为527元，就可以直接支付这样元数的钱：百位数是0或5，十位数是0或2，个位数是0，2，5，7中的一个．不同的和总共有$2\cdot2\cdot4=16$种，而如果000不算在内，则共有15种．

特别地，在和为999元中，必定包含不同元数的和是$6^3-1=215$种．

值得指出，数6有一些有趣的性质．和为6元的钱币可以由5元币与1元币组成，也可以由每张都是2元的钱币组成．在第一种情况，我们不能支付和为2、3、4元的钱，而在第二种情况，不能付出和为1、5元的钱．这样，如果有6元钱，我们必定可以付出的和（按题目确定的意义）只有一种，就是6元．但是，有6元钱，不管哪种情况，我们都能至少付出三种不同的和！

**64**．从题目的条件容易得出关系式

$$s_1+s_2+\cdots+s_n=m,$$

$$g_1+g_2+\cdots+g_m=n.$$

因为同一品种的树木可以在几个公园中生长，同样地，同一个公园里可以生长几个品种的树木，那末下面的关系式成立：

$$1\cdot s_1+2\cdot s_2+\cdots+n\cdot s_n\geqslant n,$$

$$1\cdot g_1+2\cdot g_2+\cdots+m\cdot g_m\geqslant m.$$

**65**．如果柱$M$位于柱$L$与$N$之间，那末路径

$$ABC\cdots LMN\cdots T$$

（这符号只表示路径顺序，并不表示柱子的放置顺序．——译者）比路径

$$ABC\cdots LN\cdots TM$$

短 $TM$. 由此得出结论：要使路径

$$ABC\cdots LMN\cdots T$$

是最长的路径，必须使这条路径的两个相邻的线段永远有相反的方向. 这时，路径的长表示成下面的形式：

$$d=\overline{AB}-\overline{BC}+\overline{CD}-\overline{DE}+\cdots,$$ ①

并且，如果柱数是奇数，那末

$$d'=\overline{AB}-\overline{BC}+\overline{CD}-\overline{DE}+\cdots+\overline{RS}-\overline{ST},$$

而如果柱数是偶数，那末

$$d''=\overline{AB}-\overline{BC}+\overline{CD}-\overline{DE}+\cdots-\overline{RS}+\overline{ST}.$$

柱 $A, B, C, \cdots, T$ 的坐标分别记作

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n. \tag{1}$$

根据上面所述，有

$$x_0<x_1,\ x_1>x_2,\ x_2<x_3,\ x_3>x_4,\ \cdots$$

因为按照题设，柱子是等距离放置的，所以，数列(1)可以看作是数 $0, 1, 2, \cdots, n$ 的某个排列.

这时，从等式

$$\overline{AB}=x_1-x_0,\ \overline{BC}=x_2-x_1,\ \overline{CD}=x_3-x_2,\ \cdots,$$

$$x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

得到

$$d'=n(n+1)-4(x_2+x_4+x_6+\cdots+x_{n-2})-3(x_0+x_n)$$

或者

$$d''=n(n+1)-4(x_2+x_4+x_6+\cdots+x_{n-1})-(3x_0+x_n)$$

(视 $n$ 是偶数或奇数而定).

(1) 如果柱数是奇数($n$ 为偶数)，那末我们把 $n+1$ 个数

---

① 这里 $\overline{BC}$ 表示有向线段，并注意 $CB$ 与 $BC$ 方向相反. ——译者

0, 1, 2, …, $n$ 的集合分为三部分:

集合 $C_1$: 包含 $\frac{n}{2}-1$ 个数 0, 1, 2, …, $\frac{n-4}{2}$.

集合 $C_2$: 包含 2 个数 $\frac{n-2}{2}$, $\frac{n}{2}$.

集合 $C_3$: 包含 $\frac{n}{2}$ 个数

$$\frac{n+2}{2},\ \frac{n+4}{2},\ \frac{n+6}{2},\ \cdots,\ n.$$

并把集合 $C_1$ 的数的任意一个排列记作

$$x_2,\ x_4,\ x_6,\ \cdots,\ x_{n-2},$$

集合 $C_2$ 的数的任意一个排列记作

$$x_0,\ x_n,$$

集合 $C_3$ 的数的任意一个排列记作

$$x_1,\ x_3,\ x_5,\ \cdots,\ x_{n-1}.$$

这时

$$d'=n(n+1)-4\frac{\frac{n-4}{2}\left(\frac{n-4}{2}+1\right)}{2}-3\left(\frac{n-2}{2}+\frac{n}{2}\right)$$
$$=\frac{n^2+2n-2}{2}$$

等于钉钉子可能经过的最长路径的长度(这是因为在上面关于 $d'$ 的表达式中,第二项、第三项是带负号的,它们的绝对值已取最小值. ——译者). 这条路径从集合 $C_2$ 的第一根柱子开始,然后轮流地在集合 $C_1$ 的柱子与集合 $C_3$ 的柱子之间交替来回,最后到集合 $C_2$ 的第二根柱子终止. 这时,路径的长度不依赖于以怎样的方式轮流交替地走遍集合 $C_1$ 与 $C_3$ 的柱子.

(2) 如果柱数是偶数($n$ 为奇数),那末我们把数

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{n-3}{2}$$

的任意一个排列记作

$$x_2,\ x_4,\ x_6,\ \cdots,\ x_{n-1},$$

把数
$$\frac{n+3}{2},\ \frac{n+5}{2},\ \frac{n+7}{2},\ \cdots,\ n$$

的任意一个排列记作

$$x_1,\ x_3,\ x_5,\ \cdots,\ x_{n-2},$$

并且
$$x_0=\frac{n-1}{2},\quad x_n=\frac{n+1}{2}.$$

这时

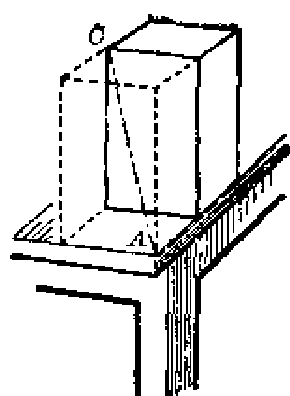
$$d''=n(n+1)-4\,\frac{\frac{n-3}{2}\left(\frac{n-3}{2}+1\right)}{2}-\left(3\,\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}\right)$$

$$=\frac{n^2+2n+1}{2}$$

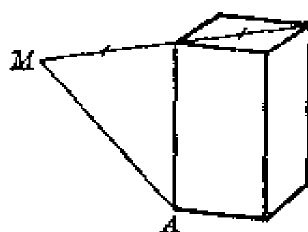
等于钉钉子可能经过的最长路径的长度．这条路径我们也可以用不同的方式经过．

**66**．把砖头放在桌子上，如图 123($a$) 中的虚线所示，用铅笔把砖头一条棱的端点，在桌子的边缘上作上记号． 然后把砖头沿着桌子的这边移动，使砖头的顶点与桌子上的记号重合(砖头的新位置在图上用实线表示)，用直尺量出桌的角顶 $A$ 到移动后的砖头顶点 $C$ 的距离，就得到所求的砖头的对角线的长．

还有一种解法如下．把一块小木板的边与砖头上底面两个相对顶点重合，并使其中一个顶点与小木板边的端点重合，在小木板边上截取线段等于砖头上底面对角线的长．然后把小木板移动一段等于这对角线长的距离(图 123($b$))，量出距离 $AM$．




(a)




(b)

图 123

**67**．十分明显，如果不伸长绳子，就不能移动绳子，使它的某一段不再平行于箱子对应的棱．只改变绳子在上下底的交叉点的位置也是不可能的，因为在这种情况，连结这两点的绳子的一段，就必须伸长（图 124）。

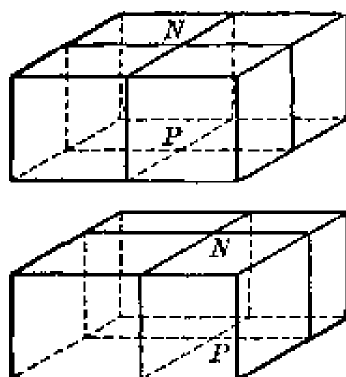



图 124

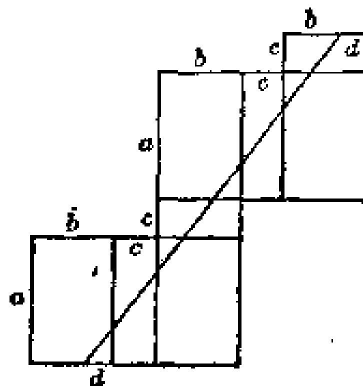



图 125

**68**．如果在形状为长方体的糖果盒上，画出带子经过的路径，那末在糖果盒的展开图上，这条路径就形成一条直线（见图 125，图上糖果盒有两个面是重复的）．从图上容易看出：

(1) 带子的长等于 $2\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}$;

(2) 带子与棱相交所成的角的正切等于 $\frac{a+c}{b+c}$ 或 $\frac{b+c}{a+c}$;

(3) 不拉长带子，可以使带子沿着盒子滑动(在图 125 上表示为平行移动);

(4) 当 $c<a$ 且 $c<b$ 时，也就是当盒子最大的面，有带子的两条线段经过时，带子的长度为最短.

**69**. 我们限于讨论只有一个一公斤的砝码的情况.

设 $AC=l$(图 126)表示杆秤的重心 $C$ 与悬挂重物的点 $A$ 之间的距离. 设 $Q$ 为杆秤的重量. 杆秤的重心通过实验而确定.

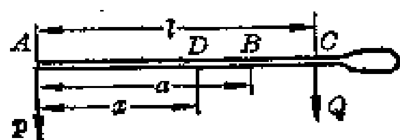



图 126

假设在点 $A$ 悬挂 1 公斤的重物，在点 $B$ 处支撑杆秤，就使它得到平衡. 线段 $AB$ 的长记作 $a$.

如果在点 $A$ 悬挂任意 $p$ 公斤的重物，杆秤平衡时的支点记作 $D$. 线段 $AD$ 的长用 $x$ 表示.

由上述两种情况平衡的条件，得出力矩的等式

$$a=Q(l-a),\ px=Q(l-x),$$

由此可得

$$\frac{px}{a}=\frac{l-x}{l-a}. \qquad (1)$$

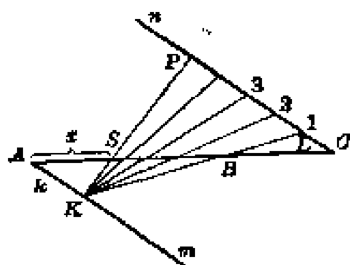



图 127

为了在秤杆上作出刻度，我们在纸上画一条线段 $AC$，在上面标明点 $B$，并过线段端点 $A$ 与 $C$，分别画两条平行的射线 $Am$ 与 $Cn$，如图 127 所示.

然后，在射线 $Cn$ 上从点 $C$ 开始，截取任意长的相等线段 $C1$, 12, 23, …. 设点 1 用 $L$ 表示，并设 $CL$ 为单位长. 经过

射线上点 $L$ 与线段 $AC$ 上点 $B$ 画直线，与射线 $Am$ 相交于点 $K$.

从相似三角形 $AKB$ 与 $CLB$ 得出对于线段 $AK=k$ 的关系式

$$k=\frac{a}{l-a}, \tag{2}$$

这时永远有 $l>a$.

现在，我们以点 $K$ 作为投影中心，把射线 $Cn$ 上的刻度投影到直线 $AC$ 上. 设 $S$ 是点 $P$ 的投影，$CP=p$. 从相似三角形 $AKS$ 和 $CPS$，并考虑到等式(2)，我们得出：

$$\frac{p\cdot AS}{a}=\frac{l-AS}{l-a}.$$

把这个结果与等式(1)进行比较，我们发现 $AS=x$，所以，当杆秤挂有 $p$ 公斤重物时，它的支点必定是点 $S$.

这样，利用上述把均匀刻度投影的方法，我们可以在杆秤上作出刻度，而且不只估计到公斤的整数值.

从上面的推理得出，题目条件要求秤杆的粗细一致、质量均匀是多余的.

**70.** 从图 128 看到，我们有 $AO=\sqrt{OB^2-AB^2}$. 因为 $AB$ 等于活动直尺的宽度 $s$，$OB$ 的最小值等于钉子到固定直尺的距离 $h$，那末 $AO$ 的最小值等于 $\sqrt{h^2-s^2}$.

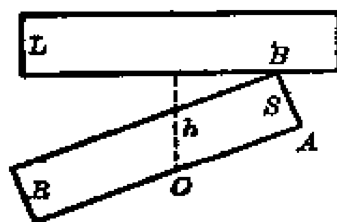


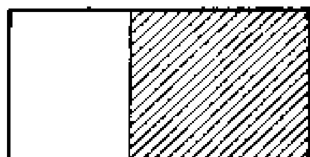

图 128

**71.** 把长方形分为两部分显然是基本分划(图 129).

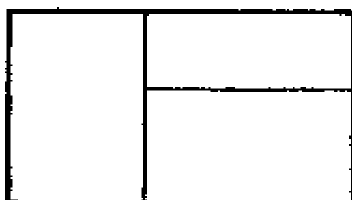
现在我们注意到，如果长方形用基本分划分为多于 2 个部分，那末长方形的每一条边，必定至少被一条分划线所截断. 换句话说，如图 130 那样的布置，就不可能是基本分划，其中垂直的分划线，把整个长方形切去左边

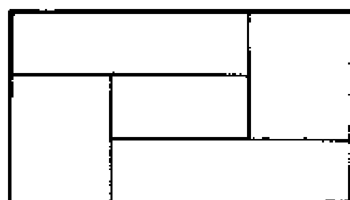
的一个长方形．它的内部已经没有进一步的分划线，而右边画上细线的长方形内，可以任意配置分划线，原长方形进行这样的分划，就不可能是基本分划．

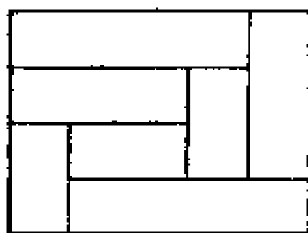
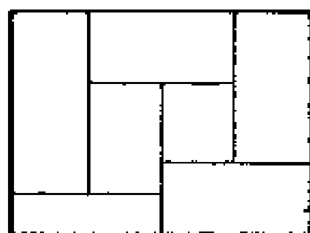

图 129


图 130

从上面的注意得出，不存在分为三部分的基本分划．因为每个把长方形分为三部分的分划，长方形至少有一边跟任意一条分划线不相交．从这个注意还得出，不存在分为四部分的基本分划．


图 131


图 132



图 133

当然，长方形分为五部分的基本分划是可能的(图 132)．同样地，长方形分为七部分或更多部分的基本分划也是可能的，但是由于有不同的方法，可以把长方形分成同样数目的部分，所以问题的解决就复杂了．例如，图 133 表明分为七部分

的两种不同的基本分划，图 134 表明分为八部分的四种不同的基本分划.

现在转向解答题目所提的关于把正方形分成若干个面积相等部分的基本分划问题.

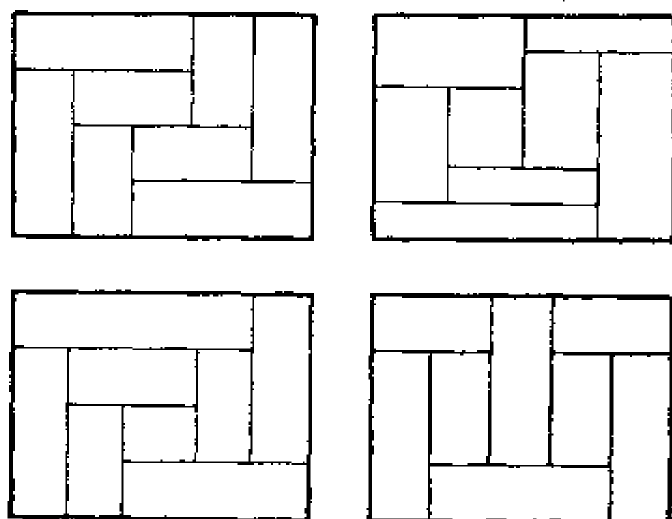


图 134

**分成五个面积相等的部分.** 设已知边长等于 1 的正方形. 假定，用基本分划分这正方形为面积相等的五部分(图 135).

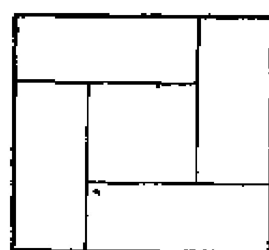


图 135

我们限于研究对称的分划. 用 $x$ 表示中间正方形的边长，得到 $x^2=\frac{1}{5}$，因而 $x=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 所以其余四个长方形的长与宽分别是

$$\frac{5-\sqrt{5}}{10} \text{ 与 } \frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

**分成七个面积相等的部分.** 再取一个边长等于 1 的正方形，假定它按图 136 的示意图分为七个面积相等的部分. 分成的各个长方形边长的记号，已在图 136 上注明.

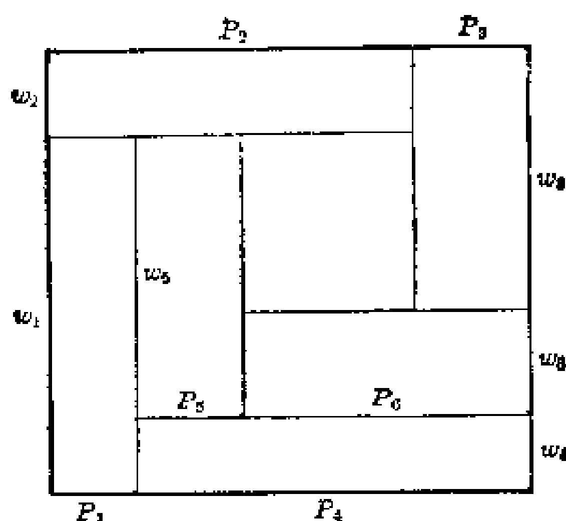



图 136

设 $w_1=x$，这时 $p_1=\dfrac{1}{7x}$，以下顺次得到：

$$w_2=1-x,\quad p_2=\frac{1}{7(1-x)},$$

$$p_3=1-p_2=1-\frac{1}{7(1-x)}=\frac{6-7x}{7(1-x)},\quad w_3=\frac{1-x}{6-7x},$$

$$p_4=1-p_1=1-\frac{1}{7x}=\frac{7x-1}{7x},\quad w_4=\frac{x}{7x-1},$$

$$w_5=w_1-w_4=x-\frac{x}{7x-1}=\frac{x(7x-2)}{7x-1},$$

$$p_5=\frac{7x-1}{7x(7x-2)},$$

$$p_6=p_4-p_5=\frac{7x-1}{7x}-\frac{7x-1}{7x(7x-2)}=\frac{(7x-1)(7x-3)}{7x(7x-2)},$$

$$w_6=\frac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}.$$

因为 $w_3+w_4+w_6=1$，所以

$$\frac{1-x}{6-7x}+\frac{x}{7x-1}+\frac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}=1,$$

经过简单的变形，我们得到方程

$$196x^3-294x^2+128x-15=0.$$

这方程的一个根是 $x=\frac{1}{2}$. 这个根不是问题的解，因为当 $x=\frac{1}{2}$ 时，得到 $w_1=w_2$，所以 $p_1=p_2$，正方形的分划就不是基本分划（因为这时以 $p_1$、$w_1$ 为边的长方形与以 $p_2$、$w_2$ 为边的长方形可以合并成一个长方形. ——译者）. 这方程的另外两个根是

$$\frac{7+\sqrt{19}}{14} \text{ 与 } \frac{7-\sqrt{19}}{14}.$$

因为根据题目的条件，应该有 $x>\frac{3}{7}=\frac{6}{14}$（否则将有 $p_6<0$），那末适合题目的解只有数 $\frac{7+\sqrt{19}}{14}$. 与此相对应的解答见图 137. 这个解是米古森斯基教授指出的.

可以证明，用基本分划把长方形分成面积相等的七部分，

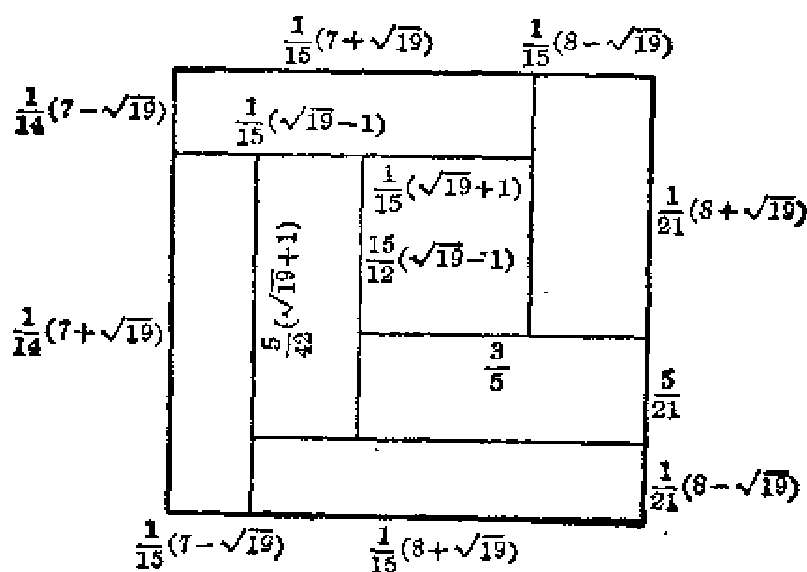



图 137

如图 133 那种类型是不存在的．但是存在另外的类型．

分成八个面积相等的部分． 现在我们来研究，把正方形分成八个面积相等部分的基本分划．

假定边长为 1 的正方形，可以按图 138 所示的对称方式进行分划，这时每个小长方形的面积等于 $\frac{1}{8}$．

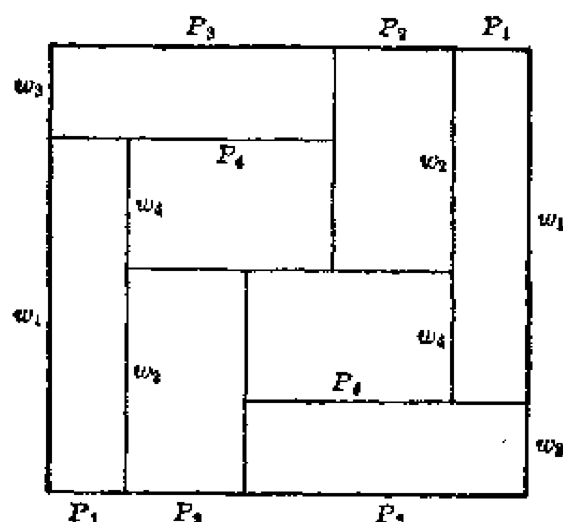



图 138

注意到对称性，我们有 $w_2=\frac{1}{2}$，所以 $p_2=\frac{1}{4}$． 设 $w_1=x$，这时

$$p_1=\frac{1}{8x},\quad w_3=1-x,\ p_3=\frac{1}{8(1-x)},\quad w_4=x-\frac{1}{2},$$

$$p_4=\frac{1}{8\left(x-\frac{1}{2}\right)},$$

而 $p_4=p_3-p_1$，所以归根到底有

$$\frac{1}{8\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{8(1-x)}-\frac{1}{8x},$$

由此可得

$$x(1-x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)(1-x),$$

经过一些变形以后，最后得

$$6x^2-6x+1=0.$$

从这方程得出 $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$，由于必须有 $x>\frac{1}{2}$，所以只有根 $x_2=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ 满足题目的条件.

图 139 画出正方形分为八个面积相等部分的基本分划，并且指出了各个长方形的长与宽.

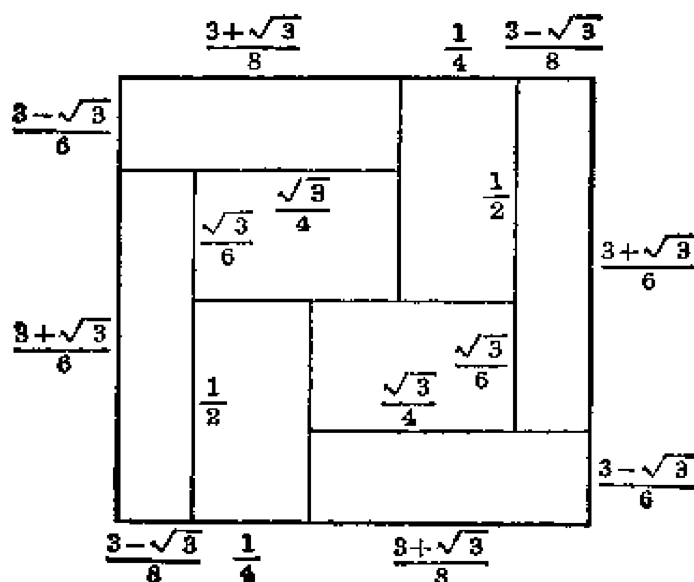



图 139

除了上面所研究的分法外，正方形分为八个面积相等部分，还可能有另外基本分划，如图 140 所示. 这个分法可以用与上面类似的方法得出.

**72**. 问题解法如下：在地面上的点 $O$ 安放水准仪(图 141)，测量地面在任意选定的方向 $OC_1$ 的倾斜度. 为此，我

图 140

图 141

们在这个方向上的点 $A_1$ 立一标尺，测出距离 $d_1$ 以及点 $O$ 与 $A_1$ 间的高差 $h$. 地面的倾斜度由比值 $t_1=\frac{h_1}{d_1}$ 确定. 然后把水准仪的望远镜旋转 $90^\circ$，在垂直于 $OC_1$ 的方向 $OC_2$ 上，测出地面的倾斜度，它表示为数 $t_2=\frac{h_2}{d_2}$.

把射线 $OC_1$ 作为轴 $Ox$, $OC_2$ 作为轴 $Oy$. 找出在这两条轴上的分量分别是 $t_1$、$t_2$ 的矢量，这矢量的方向就是地面倾斜

度的方向，它的长(即矢量的模. ——译者)，即数$\sqrt{t_1^2+t_2^2}$，等于地面的倾斜度.

下面是这个方法的根据. 设 $p$ 是经过点 $O$ 的水平线，$q$ 是倾斜线，$q'$ 是倾斜线在水平平面 $M$ 内的投影，$\beta$ 是倾斜角，$\alpha$ 是由方向 $OC_2$ 与方向 $q'$ 形成的未知角.

我们有

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{h_1}{x_1}=\frac{h_2}{x_2},$$

由此得到

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{h_1}{h_2}.$$

此外，我们有

$$\frac{x_1}{d_1}=\sin\alpha,\quad \frac{x_2}{d_2}=\cos\alpha,$$

因此

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{x_1d_2}{d_1x_2}=\frac{h_1d_2}{d_1h_2}=\frac{t_1}{t_2},$$

所以，上面的求倾斜方向的方法是正确的.

最后，我们计算地面的倾斜度:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{h_2}{x_2}=\frac{h_2}{d_2\cos\alpha}=\frac{h_2}{d_2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sqrt{t_1^2+t_2^2}=t.$$

**73.** 假定城市 $M$ 同城市 $A, B, C, D, \cdots$ 用线段 $MA, MB, MC, MD, \cdots$ 连接(图 142).

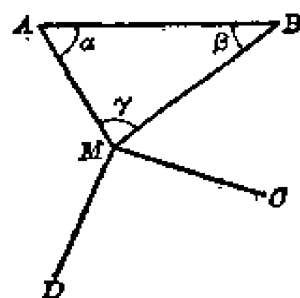


图 142

连接 $AB$，我们有 $AM<AB$, $BM<AB$，因为在相反的情况，连线 $AM$ 与 $BM$ 中，就至少有一条由连线 $AB$ 所代替.

从不等式

$$AM<AB \text{ 与 } BM<AB$$

得出不等式

$$\gamma>\alpha \text{ 与 } \gamma>\beta.$$

把这两个不等式与等式 $\gamma=\gamma$ 相加，得到

$$3\gamma>\alpha+\beta+\gamma \text{ 或者 } 3\gamma>180°,$$

所以，$\gamma>60°$.

但是，如果有不等式 $\gamma>60°$，那末在点 $M$ 最多只可能聚集着五个三角形的顶点，这就是所要证明的结论.

**74**. 存在如图 143 所示的三种铁路网.

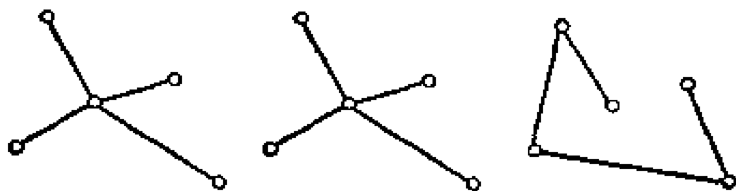


图 143

(1) 第一种情况，每一个城市都可以成为枢纽站，这里聚集有四条铁路，所以这一类的不同的铁路网有五种.

(2) 第二种情况，作为枢纽站的城市聚集有三条铁路，可以用四种方法与其他三个城市连接(四个元素每次取三个元素的组合数). 在每一种情况下，第五个城市都可以同这三个城市的每一个连接，所以，所有可能的连接方式有 $4\cdot3=12$ 种. 由于五个城市的每一个都可以作为枢纽站，所以我们研究的这类不同的铁路网，共有 $5\cdot12=60$ 种.

(3) 第三种情况，连接各城市的铁路网，可以任意改变城市的顺序，所以铁路网的总数等于 5 个元素的全排列数，即 $5!=120$. 但是每个排列与顺序相反的排列所确定的铁路网是相同的，所以不同的铁路网有 $120\div2=60$ 种.

总共有 $5+60+60=125$ 种铁路网.

**75**. (1) 底边和高都为定长的三角形，以等腰三角形的周长为最小.

要证明这一点，只须注意(图 144)，过椭圆的点 $M$ 的切线上的点 $P$，一定在这个椭圆的外面(图上 $K$、$L$ 为椭圆的焦点，点 $M$ 为短轴的端点. ——译者)，因此

$$KP+PL>KM+ML.$$

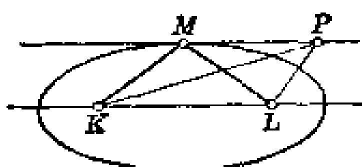



图 144

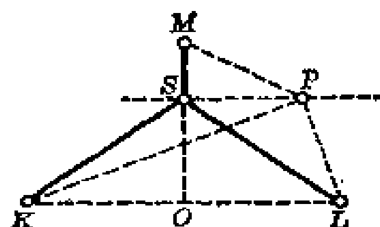



图 145

(2) 从上面的论断推出，如果点 $K$, $L$, $M$ 是等腰三角形的顶点，底边 $KL=2p$，高 $MO=h$(图 145)，那末，网 $KS+LS+MS$ 短于网 $KP+LP+MP$.

(3) 引进记号(图 145)：

$$OS=x,\ KS+LS+MS=m;$$

我们得到 $$2\sqrt{p^2+x^2}+h-x=m,$$

由此 $$3x^2-2(m-h)x+4p^2-(m-h)^2=0.$$

因而(由实根存在条件)我们得到：

$$(m-h)^2-3p^2\geqslant 0.$$

这个条件导出下面对 $m$ 的限制：

$$m\geqslant h+p\sqrt{3},$$

并且当 $$x=\frac{m-h}{3}=\frac{p\sqrt{3}}{3}$$

时得到 $m$ 的最小值，这时 $\angle OKS=30°$.

(4) 如果没有枢纽站，用铁路网连接城市 $A$、$B$、$C$、$D$，总长最短的路径如图 146 所示(或者把这个图绕正方形的中心分别旋转 90°，180°，270°，所得三条路径中的一条). 这样

连接的路径共长 300 公里.

(5) 假定连接城市 $A$、$B$、$C$、$D$ 的铁路网有一个枢纽站 $S$. 这个枢纽站必须至少同城市 $A$、$B$、$C$、$D$ 中的三个连接(图 147), 否则, 把经过枢纽站的路径拉直, 就会给出更短的网.

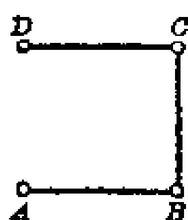
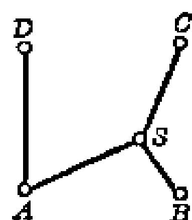


图 146



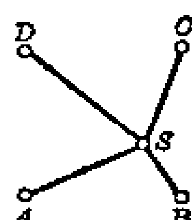


图 147

设枢纽站 $S$ 与城市 $A$、$B$、$C$ 连接, 这时, 城市 $D$ 可能与城市 $A$、$C$ 中的一个连接, 也可能与枢纽站 $S$ 连接.

第一种情况, 根据第 2 点与第 3 点中证明过的结论 ($p=h-50\sqrt{2}$ 公里), 最短的铁路网的总长等于

$$100+50\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\approx 293.2 \text{ 公里}.$$

第二种情况, 根据在第 1 点中证明过的结论, 如果点 $S$ 在正方形的边 $AB$ 与 $BC$ 的对称轴上, 也就是在正方形的中心, 铁路网的总长度最短, 这时总长度等于

$$2\cdot 100\sqrt{2}\approx 282.8 \text{ 公里}.$$

(6) 如果连接城市 $A$、$B$、$C$、$D$ 的铁路网有两个枢纽站 $S_1$ 与 $S_2$. 枢纽站 $S_1$ 必须至少与点 $A$、$B$、$C$、$D$、$S_2$ 中的三点连接, 否则, 把经过枢纽站的路径拉直, 就会给出更短的网.

设枢纽站 $S_1$ 同城市 $A$、$B$ 以及枢纽站 $S_2$ 连接. 这时, 枢纽站 $S_2$ 将同城市 $C$ 与 $D$ 连接, 网的布置如图 148 所示.

如果点 $S_1$ 与 $S_2$ 不在正方形的边 $AB$ 的对称轴上, 那末, 根据第 1 点的推断, 枢纽站设在 $S_1$ 与 $S_2$ 的铁路网, 将比枢纽

站设在 $P_1$ 与 $P_2$ 的铁路网长. 所以，当点 $P_1$ 与 $P_2$ 关于正方形的中心对称，并且 $\angle P_1AB=\angle P_2CD=30°$，铁路网最短，它的总长等于(见第 3 点，如果 $p=h=50$)：

$$100(1+\sqrt{3})\approx 273.2 \text{ 公里}.$$

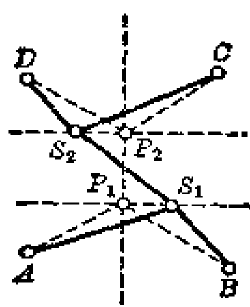


图 148

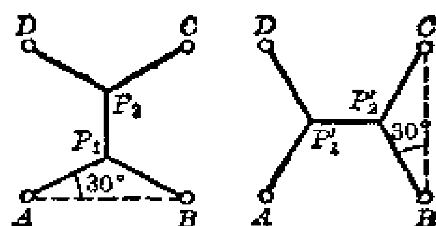


图 149

(7) 枢纽站如果多于 2 个，将使铁路网长度增加. 所以根据题目条件，连接城市 $A$、$B$、$C$、$D$ 的最短的铁路网的总长等于

$$100(1+\sqrt{3})\approx 273.2 \text{ 公里}.$$

它可以用两种方法实现，见图 149.

**76.** 在(地)球面上最短路径是大圆，即经过球心的平面与球相交所成的圆.

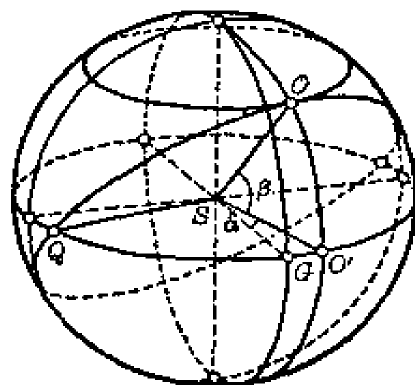


图 150

因为从奥斯陆起飞的飞机，从机场上观众的眼睛看来，它在正西方地平线上消失，所以飞机沿着与经过奥斯陆的经线交成直角的大圆飞行(奥斯陆的经度为 $\alpha=10°43'$ (东经)).

在图 150 中，设 $S$ 与 $O$ 分别代表地球中心与奥斯陆所在的点，并设 $Q$、$G$、$O'$ 分别代表飞机飞行的大圆、零度经线、经过奥斯

陆的经线同赤道的交点.

容易看出，角 $QSO'$ 是直角①. 因此我们有:

$$\angle GSQ=90^\circ-\angle GSO'=90^\circ-10^\circ43'=79^\circ17',$$

所以，飞机着陆地点必须在西经 $79^\circ17'$ 的赤道上(这样坐标的点在厄瓜多尔首都基多以西 120 公里的皮钦查省)，而因为弧 $OQ$ 等于大圆的 $\frac{1}{4}$，所以飞机的航程大约等于 10000 公里.

平面 $OSQ$ 对赤道平面的倾角 $\beta=59^\circ55'$，所以，在厄瓜多尔机场上的观众应该朝着东方偏北 $59^\circ55'$ 方向等候飞机.

**77.** 在日全食时，太阳与月亮看起来几乎是一样大小. 由此得出，太阳的直径是月亮的直径的 387 倍，它们的体积的比等于 $387^3\approx58\cdot10^6$.

**78.** 在弗劳兹拉夫昼长(即同一天从日出到日落所经历的时间)最短的一天，当然是太阳直射南回归线的时候(每年大致在 12 月 23 日)(在我们中国，这一天多数在 12 月 22 日，即冬至日. ——译者).

为了确定这一天的昼长，我们必须知道弗劳兹拉夫的纬度 $\varphi=51^\circ07'$，以及地球赤道平面同黄道平面的交角 $\delta=23^\circ27'$(这两个角度都只写出近似值).

图 151 中，设 $O$ 与 $M$ 分别表示地球中心与弗劳

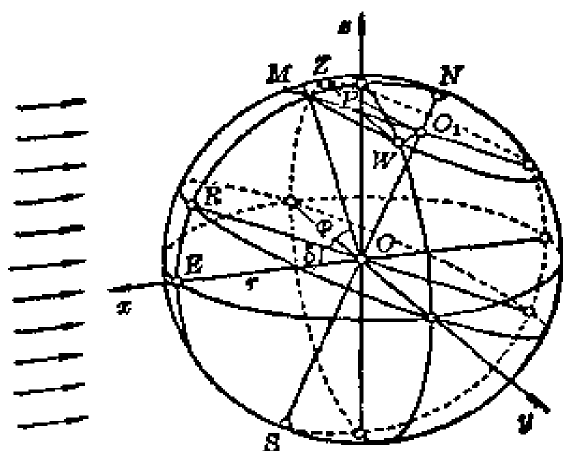



图 151

① 由于赤道平面⊥平面 $OO'S$，平面 $OQS$⊥平面 $OO'S$，那末，赤道平面与平面 $OQS$ 的交线 $QS\perp$ 平面 $OO'S$，所以，$QS\perp SO'$. ——译者

兹拉夫在地球上的位置，并设直线 $NS$ 为地球的旋转轴。设平面 $Oxy$ 为黄道平面，它与经过点 $R$ 的赤道平面的交角为 $\delta$。平面 $OWZ$ 垂直于黄道平面，太阳光线从 $Ox$ 方向射入，把地球分成亮与暗两部分。弗劳兹拉夫在日出时经过点 $Z$，沿着 $ZMW$ 旋转，到日落时处于点 $W$。弗劳兹拉夫的昼长同角 $ZO_1W$ 成比例。

弗劳兹拉夫最短的昼长，当然同经过该地的纬线 $ZMW$ 的弧长成比例，或者简单地说，同角度 $2\beta=ZO_1W$ 成比例。

根据图 151，由直角三角形 $OO_1M$，$OO_1P$ 与 $O_1PW$，我们容易得到：

$$\cos\beta=\frac{O_1P}{O_1W}=\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta,$$

由此 $$\beta=57°27'35''.$$

对于弗劳兹拉夫的最短昼长 $t$，我们得到比例式：

$$t:T=\beta:180° \quad (T=24\text{ 小时}),$$

由此得出 $$t=7\text{ 小时 }39\text{ 分 }40\text{ 秒}.$$

还值得指出，弗劳兹拉夫真正的最短昼长，比我们算出的数值大约要大四小时。这是由于太阳光线在地球外面的大气层中折射而产生的所谓天文折射的影响。

**79**. 棋盘上，与白格相邻的是黑格，反过来也一样。在有奇数个方格的棋盘上，白格数不等于黑格数，所以题目所要求的卒子位置移动是不可能的。

**80**. 题目提出的问题的回答是否定的：一个卒子也不能改变自己的位置。这里所谓相邻的方格，只是指边互相毗邻的两个方格，还是指角顶互相对接的两个方格，这是无关紧要的，但是在第二种情况，应该假定正方形棋盘的方格多于4个。

对这两种情况，我们都可以用下面的方法证明。

在有 $n^2(n>2)$ 个方格的棋盘上，第 $i$ 行与第 $k$ 列的方格用记号 $(i, k)$ 表示，最初在方格 $(i, k)$ 上的卒子现在所在的方格用记号 $F(i, k)$ 表示。

假设 $F(1, 1)=(1, 1)$，$F(n, 1)=(n, 1)$。变换 $F(i, k)$ 保持方格的相邻，就是要证明：

$$F(i, k)=(i, k),\ i=1, 2, \cdots, n;\ k=1, 2, \cdots, n.$$

马上可以看出，与棋盘角上某一确定方格相邻的方格个数，小于与棋盘边上其他方格相邻的方格个数，后者更小于与棋盘内部一个方格相邻的方格个数。因为在卒子重新放置后，没有一个卒子的相邻卒子数小于原来的相邻卒子数，所以如果方格 $(i, k)$ 在棋盘内部，那末方格 $F(i, k)$ 也在棋盘内部，或者两个都在角上，或者两个都在边上（不是角上）。

序列 $(1, 1)$，$(2, 1)$，$\cdots$，$(n, 1)$ 是顺次相邻方格的序列，这些方格沿着棋盘的边排列。序列 $F(1, 1)$，$F(2, 1)$，$\cdots$ 的方格也应该具有同样的性质。但是 $F(1, 1)=(1, 1)$，而与 $(1, 1)$ 相邻的（在 $n>2$ 的条件下）只有边上的两个方格，$(1, 2)$ 与 $(2, 1)$。所以，函数 $F(2, 1)$ 只能取这两个值中的一个。我们研究这两种情况：

(1) $F(2, 1)=(1, 2)$。在这种情况，方格 $F(3, 1)$ 在边上，它与方格 $F(2, 1)$ 即异于 $(1, 1)$ 的方格 $(1, 2)$ 相邻，所以方格 $F(3, 1)$ 必定与方格 $(1, 3)$ 重合。同理，可得 $F(4, 1)=(1, 4)$，等等。最后，角上的方格 $F(n, 1)$ 是方格 $(1, n)$，这与条件 $F(n, 1)=(n, 1)$ 矛盾。所以，情况 (1) 不可能发生，因而将发生下面的情况。

(2) $F(2, 1)=(2, 1)$。这时，按照与情况 (1) 同样的推理，我们依次得到：

$$F(3,\ 1)=(3,\ 1),\ F(4,\ 1)=(4,\ 1),\ \cdots,$$
$$F(n,\ 1)=(n,\ 1),$$
也就是说，第一列的卒子仍在原来的位置.

由等式 $F(i,\ 1)=(i,\ 1)$（这里 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$），同样地可以推出等式 $F(i,\ 2)=(i,\ 2)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 事实上，方格 $F(1,\ 2)$ 是边上的方格，它与方格 $(1,\ 1)$ 相邻，并且异于方格 $(2,\ 1)$，所以，$F(1,\ 2)=(1,\ 2)$. 方格 $F(2,\ 2)$ 与方格 $F(2,\ 1)$、$F(1,\ 2)$ 相邻，或者与方格 $(2,\ 1)$、$(1,\ 2)$ 相邻，并且异于 $(1,\ 1)$，所以 $F(2,\ 2)=(2,\ 2)$，等等.

用这样的方法，可以验证等式 $F(i,\ k)=(i,\ k)$ 对棋盘的下一列也成立.

推广　上面所得的结果可以让我们作出某些一般性的结论.

我们研究函数 $F$，它把棋盘上每个方格，变换为同一棋盘上某一确定的方格，使两个不同的方格对应不同的方格，相邻的方格也对应相邻的方格.

例如，恒等变换（每个方格都回到原处的变换），关于正方形棋盘四条对称轴的任意一条的对称变换，绕棋盘中心旋转 $90^\circ$，$180^\circ$ 或 $270^\circ$ 的旋转变换，都是这样的函数（变换）.

我们证明，每一个符合上面要求的变换 $F$，必定是上段所说的八种变换中的一种.

事实上，设 $F$ 是这样的变换. 我们知道，角上的方格对应角上的方格，所以，只可能发生下列几种情况.

I. 变换 $F$ 把方格 $(1,\ 1)$ 变到原来的位置. 在这种情况将有下面两种可能：

(1) 方格 $(n,\ 1)$ 变换到原来的位置. 我们上面已经证明过，这时变换是恒等变换.

(2) 方格$(n, 1)$变换为另一个角上的方格，这个方格只能是$(1, n)$. 用与上面研究序列$F(1, 1)$, $F(2, 1)$, $\cdots$, $F(n, 1)$同样的推理，可以确信这一点.

在变换$F$以后，我们再进行关于棋盘主对角线的对称变换$S_1$，所谓主对角线就是经过$(1, 1)$与$(n, n)$的对角线. 乘积① $F \cdot S_1$是上面研究过的那类变换，它把方格$(1, 1)$与$(n, 1)$的每一个变换到原来的位置，所以它是恒等变换$I$:

$$F \cdot S_1 = I.$$

这个等式的两边各右乘$S_1$，得到$(F \cdot S_1) \cdot S_1 = I \cdot S_1$，即$F \cdot S_1^2 = S_1$. 但是$S_1^2 = I$，所以$F = S_1$，也就是说，在这个情况，变换$F$是关于棋盘主对角线的对称变换.

II. 在变换$F$下，方格$(1, 1)$变为方格$(n, n)$. 设$S_2$表示关于棋盘另一条对角线的对称变换，它把方格$(n, n)$变换为方格$(1, 1)$. 所以变换$F \cdot S_2$把方格$(1, 1)$变换到原来的位置，因此根据(1)有两种可能：乘积$F \cdot S_2$或者是恒等变换，或者是对称变换.

(3) 乘积$F \cdot S_2$是恒等变换，即

$$F \cdot S_2 = I.$$

等式两边右乘$S_2$，得到

$$F = S_2.$$

就是说，$F$是关于棋盘经过方格$(1, n)$与$(n, 1)$对角线的对称变换.

---

① 设$A$, $B$表示某个集合到自身的变换. 先进行变换$A$，然后进行变换$B$，结果所得的变换叫做乘积$A \cdot B$(通常应写作$B \cdot A$——译者). 例如，如果$A$是平面上轴对称变换，那末$A \cdot A$即$A^2$是恒等变换. 如果$A$、$B$分别是关于相交轴$a$与$b$的对称变换，那末$A \cdot B$是绕两轴$a$、$b$交点的旋转变换，旋转角等于两轴夹角的两倍. 如果$I$是恒等变换，$A$是任意的变换，那末$A \cdot I = I \cdot A = A$. 变换的乘积服从结合律，即$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

(4) 乘积 $F\cdot S_2$ 是对称变换 $S_1$:

$$F\cdot S_2=S_1.$$

等式两边右乘 $S_2$，得到:

$$F=S_1\cdot S_2.$$

所以，在这种情况，变换 $F$ 是绕棋盘旋转 180° 或者是关于这点的中心对称.

III. 在变换 $F$ 下，方格(1, 1)变为方格($n$, 1). 设 $S_3$ 表示关于棋盘的水平对称轴的对称变换，这时，变换 $F\cdot S_3$，把方格(1, 1)变为原来的位置，我们又有两种可能.

(5) $F\cdot S_3=I$，由此得出 $F=S_3$，

或者

(6) $F\cdot S_3=S_1$，等式两边右乘 $S_3$ 以后，得到:

$$F=S_1\cdot S_3,$$

这时变换 $F$ 是绕棋盘中心旋转 90° 的变换.

IV. 在变换 $F$ 下，方格(1, 1)变为(1, $n$). 用 $S_4$ 表示关于棋盘垂直对称轴的对称变换，与情况 III 一样，我们得到两种可能.

(7) $F=S_4$，

或者

(8) $F=S_1\cdot S_4$，即 $F$ 是绕棋盘中心旋转 270° 的变换.

我们证明了：棋盘方格集合到自身的变换，如果保持方格的相邻性，只能是下面八种变换的一种:

$$I,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_1\cdot S_2,\ S_1\cdot S_3,\ S_1\cdot S_4.$$

这些变换形成所谓群.

现在回到关于卒子的问题，以这个定理为基础，我们可以作出下面更一般的结论.

在保持相邻性的条件下，如果在卒子的新的布置中，至少

有一个不在棋盘的任一条对称轴上的卒子，或者至少有两个不在同一条对称轴上的卒子，仍旧在原来的位置，那末每一个卒子都仍旧在自己原来的位置.

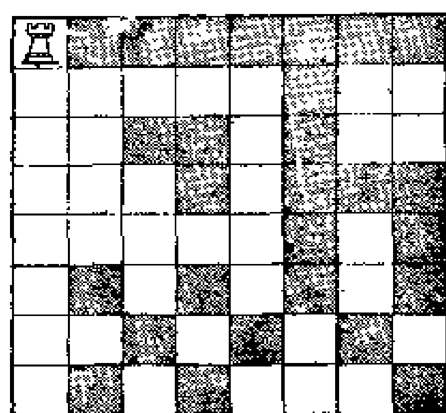


图 152

**81**. 如果存在一行其中只有一个白格，那末题目所说的车的布置方法，必定是可能的(图152). 这时，我们在棋盘上就只在这一个方格放一个车. 条件(1)与(2)显然是满足的，条件(3)也是满足的，因为棋盘上只有一个车，条件(4)也能满足，因为车所在的那一行没有不放车的白格.

现在假设一个$n$行$n$列的棋盘，不满足上段所说的条件，也就是每一行至少有两个白格，或者每一行都有不在第$K$列的白格(第$K$列就是题中所述全部是白格的列)(图153). 我们证明，存在$n$个白格，其中每个白格都与其他的白格在不同的行与不同的列. 如果当棋盘上有尽可能多的黑格，也就是每一行都只有两个白格的情况，我们能证明上面的结论就可

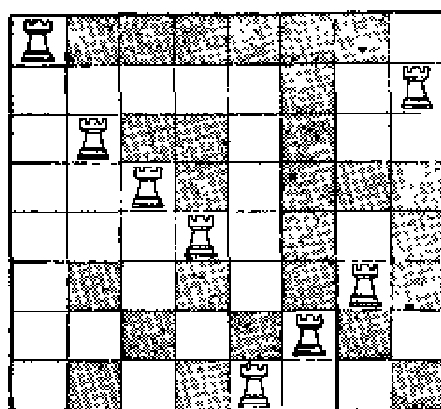


图 153

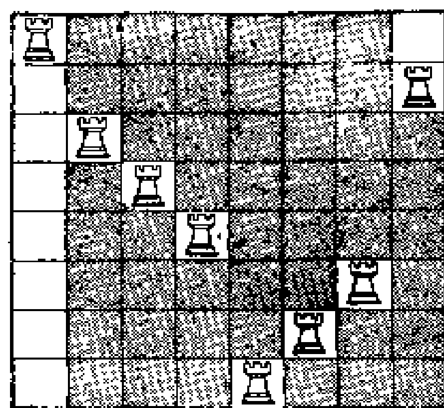


图 154

以了(图 154).

棋盘划去第 $K$ 列以后所形成的 $n$ 行记作 $W_1, W_2, \cdots, W_n$. 这样的行都有 $n-1$ 个方格，其中每一行都只有一个白格. 由此得出，必定有两行是完全一样的，设这两行是 $W_1$ 与 $W_2$，那末这两行的白格在同一列. 行 $W_3, W_4, \cdots, W_n$ 必定互不相同，而且跟 $W_1$ 也不相同，因为，如果不是这样，棋盘将有一列全部由黑格组成.

第一行第 $K$ 列的白格，以及行 $W_2, W_3, \cdots, W_n$ 中的白格(共 $n$ 个)，在棋盘中处于不同的行与不同的列. 在这些格子上放上车，这样的布置满足题目的条件(1)～(4)，因为每一行与每一列都刚好有一个车.

**82.** 我们回忆下面的性质：椭圆上任意一点的切线，同这点与椭圆焦点连成的两条线段所夹的两个角相等. 这意味着，从焦点 $F_1$ 出发的台球，从球台边缘弹回来，应该击中焦点 $F_2$(在图 155 上，台球的路径用虚线表示). 因此，这张图也证明了，本题有解的假定，将与反射定律矛盾. 因为如果本题有解，就要求入射角大于反射角.

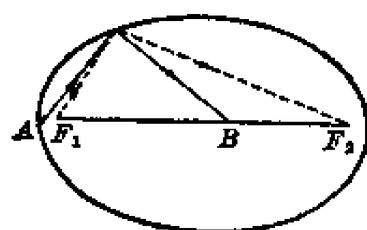


图 155

**83.** 全班共有学生 25 人. 因为有 6 个学生数学成绩不及格，所以成绩至少是及格的学生共有 19 人. 全班"运动员"(如果认为一个学生只会一个运动项目)共有 17+13+8=38 人，但是由于没有一个学生掌握三个运动项目，所以，参加运动的学生共有 19 人(据据上面所得)，每人掌握两个运动项目.

现在可以容易地回答题目所提的问题了.

(1) 班里没有一个学生数学成绩为优秀.

(2) 19 个运动员中，17 人会骑自行车，因此只有两个学生同时会游泳与滑雪，所以有两个游泳运动员会滑雪.

**84**. 俱乐部的全体成员只有一个等级是不可能的，也就是说，他们每人战胜的次数不可能都相同，因为决赛的次数(45)不能被 10 整除.

运动员也不可能分成 9 个等级. 事实上，如果能分成 9 个等级，那末其中一个等级有两人，其余八个等级各有一人. 这与题目的条件矛盾. 事实上，如果每胜一次算作得一分，那末分在 9 个等级中的 9 个棋手不可能共得$0+1+2+\cdots+8=36$分，也不可能共得 $1+2+3+\cdots+9=45$ 分，因为这两种情况，第十个人将分别得 9 分或 0 分，这就变成十个等级了. 同样地，9 个棋手不可能共得 $0+1+\cdots+i+(i+2)+\cdots+9=36+8-i$分，因为这时，第十个人将得 $i+1$ 分，这又成为十个等级了.

但是，运动员可以分成 10, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 个等级.

我们举出分为 3 个与 7 个等级的例子. 用字母表示棋手. 第 $k$ 行与第 $i$ 列交叉处的数字 1，表示第 $k$ 行的棋手战胜第 $i$ 列的棋手. 数字 0 表示被战胜.

分为 7 个等级

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| B | 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| C | 0 | 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| D | 0 | 0 | 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 0 | 1 | 0 | 1 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 0 | 1 | 0 |
| H | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 0 | 1 |
| I | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | 0 |
| J | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |

分为 3 个等级

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| B | 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| C | 1 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| D | 0 | 0 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 1 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 0 | 0 | 1 |
| H | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | 0 | 1 |
| I | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 1 |
| J | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

棋手分为 10, 8, 6, 5, 4, 2 个等级的例子是怎样的？请举出来.

**85**. 首先我们利用数学归纳法证明，总有某一队是冠军. 设排球联合会中有 $n$ 队. 把这 $n$ 队的队长集中成一队，我们请其中一个队长(设他是 $K$ 队的)以及直接被 $K$ 队战胜的队的队长离开. 于是剩下只有 $n'$ 个队长，其中 $n'<n$. 如果定理对于所有小于 $n$ 的 $n'$ 是真的，那末在这个队中必定可以找到这 $n'$ 队的冠军队的队长. 因为他留在队里，所以他的队直接战胜 $K$ 队，而且间接战胜其他那些队长已经离开的队，所以，他的队是运动联合会的所有 $n$ 队的冠军，这就是我们所要的证明.

证明(2)同样是容易的. 用 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 表示所有的队. 假设 $D_1$ 队是直接得胜次数最多的队，比如，它直接战胜 $D_2, D_3, \cdots, D_m$ 队(但没有直接战胜其他的队). 我们要证明，$D_1$ 队间接战胜 $D_{m+1}, D_{m+2}, \cdots, D_n$ 队. 假定与此相反，比方说，$D_{m+1}$ 队没有被 $D_2$ 队，也没有被 $D_3$ 队，…，也没有被 $D_m$ 队直接战胜，也就是说 $D_{m+1}$ 队直接战胜了这些队. 由于 $D_1$ 队没有直接战胜 $D_{m+1}$ 队，所以，$D_{m+1}$ 队直接战胜 $D_1$ 队，那末 $D_{m+1}$ 队直接战胜的次数大于 $D_1$ 队直接战胜的次数($D_{m+1}$ 队直接得胜 $m$ 次，$D_1$ 队直接得胜 $m-1$ 次. ——译者)，这与关于 $D_1$ 队的假设矛盾. 所得的矛盾证明了(2).

**86**. 图 156 中，水平轴的两边表示路程，左边——去邮局，右边——去村政府. 垂直轴表示时间. 线 $OP_1$ 与 $OO'P_2$ 分别表示两个通信员的路径. 如果骑车者先去追赶早出发的送信人，那末他的路径由折线 $KA_1B_1C_1D_1$ 确定；如果他先去追赶晚出发的送信人，那末他的路径由折线 $KA_2B_2C_2D_2$ 确定. 从图中可以看出，骑车者应该选择第二种可能. 即使他

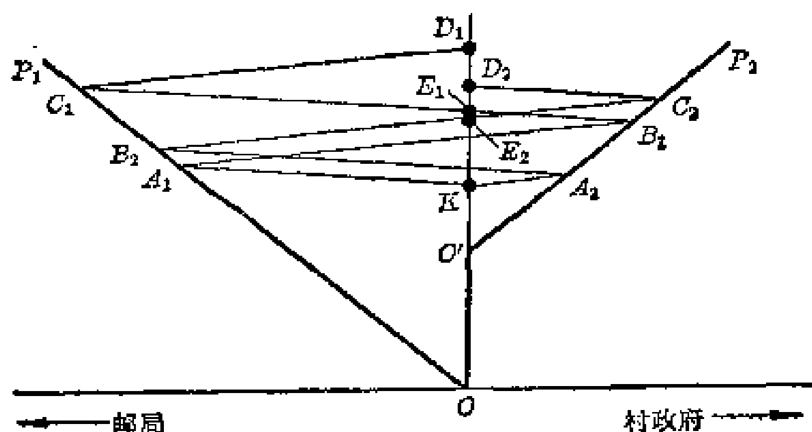



图 156

只把钱交给送信人，也就是他的路径终点是 $E_1$ 或 $E_2$ 时，也应该选择第二条路径.

**87**. 因为每头狗跑的方向，跟它所追赶的狗跑的方向交成直角，而追赶的狗总是朝着逃跑的狗跑去，所以，追赶的狗以每秒 10 米的速度接近相邻的狗，并且经过 10 秒钟追到它. 因此，每头狗跑的路径等于 100 米. 在每一时刻，四头狗形成一个正方形，这个正方形不停地在旋转，并且它的边长以每秒 10 米的均匀速度减少. 设四条路径相交于正方形的中心 $S$，每条路径都是曲线(对数螺线). 它们在到达点 $S$ 之前不相交，因为如果一头狗越过另一头狗的路径，这表示后者较早地到达这个位置，由于每一时刻所有的狗到 $S$ 的距离都相等，所以这是不可能的.

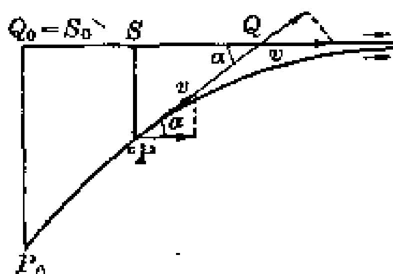



图 157

**88**. 设 $\alpha$ 表示方向 $PQ$ 与军舰 $Q$ 的路径所夹的瞬时角度(图157)，$v$ 表示军舰 $P$ 与 $Q$ 在这一时刻的瞬时速度. 军舰 $P$ 在它驶向 $Q$ 的方向上的速度 $v$，以及军舰

$Q$ 的速度在这方向上的分量 $v\cos\alpha$, 两者都影响两舰的互相接近的速度(也就是说,我们从军舰 $P$ 的路径的切线方向上看两舰的速度,它们在这方向上的速度分量分别为 $v$ 及 $v\cos\alpha$. ——译者). 所以两舰接近的速度等于 $v(1-\cos\alpha)$.

点 $P$ 在军舰 $Q$ 的路径上的投影 $S$, 以速度 $v\cos\alpha$ 在这条路径上移动, 而军舰 $Q$ 行驶的速度等于 $v$, 所以距离 $SQ$ 以速度 $v(1-\cos\alpha)$ 增加. 因为我们上面已经指出, 距离 $PQ$ 以同样的速度减小, 那末和 $PQ+SQ$ 是常量, 所以同最初的距离相等, 即 10 海里. 经过无限长的时间以后, $P$ 与 $S$ 几乎重合, $PQ+SQ=2PQ=10$ 海里, 因而 $PQ=5$ 海里.

**89**. 设 $P_1$、$P_2$ 表示两舰在最初时刻的位置(这时第一艘军舰发现第二艘军舰), $O_1$、$O_2$ 表示它们距离最近时的位置, 那末第一艘军舰沿着直线 $P_1O_2$ 从点 $P_1$ 驶向 $O_1$(图 158). 此外, 在最后的时刻, 两舰在 $O_1O_2$ 上的速度分量必定相等, 即

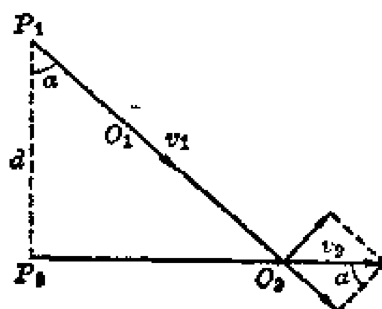


图 158

$$v_1=v_2\sin\alpha,\ \sin\alpha=k.$$

第一艘军舰行驶方向由角 $\alpha$ 确定. 因为两舰分别同时到达点 $O_1$、$O_2$, 所以

$$\frac{P_1O_1}{P_2O_2}=\frac{v_1}{v_2}=\sin\alpha.$$

因而
$$P_2O_2=d\cdot\operatorname{tg}\alpha,\quad P_1O_2=\frac{d}{\cos\alpha},$$

那末所求的两舰之间最短距离等于

$$O_1O_2=\frac{d}{\cos\alpha}-\frac{d\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=d\cos\alpha=d\sqrt{1-k^2}.$$

**90**. 如果 $k$ 的意义与上题相同, 那末发信号的军舰的航

向由角 $\alpha$ 确定，其中

$$\sin\alpha=k=\frac{v_1}{v_2}.$$

如果相反，$k$ 表示被发现的军舰与发信号的军舰的速度的比，那末航向也由等式 $\sin\alpha=k$ 确定，两舰在点 $O_2$ 相遇(图 158)，因为

$$\frac{P_1O_2}{v_1}=\frac{P_2O_2}{v_2},$$

或者

$$\frac{1}{v_1\cos\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{v_2},$$

$$\sin\alpha=\frac{v_2}{v_1}=k.$$

所以，在第二种情况，航向也是用与第一种情况相同的方法确定.

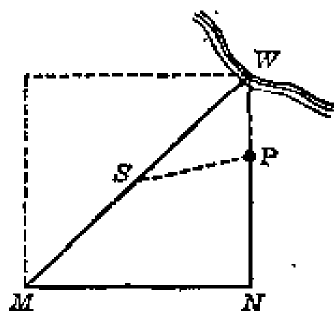


图 159

**91**. 在题目所说的时刻，警戒船在点 $S$，摩托艇在点 $M$ (图 159). 摩托艇沿着正方形的边 $MN$、$NW$ 航行. 在线段 $MN$ 上，警戒船不能追及摩托艇，因为它的速度太小. 设 $a$ 表示正方形的边长，$v$ 表示警戒船的速度(所以摩托艇的速度等于 $3v$). 如果警戒船到达线段 $NW$ 上的点 $P$ 不比摩托船晚，即如果

$$\frac{MN+NP}{3v}\geqslant\frac{SP}{v}$$

或者 $a+NP\geqslant 3\cdot SP$, $(a+NP)^2\geqslant 9(SP)^2$,

那末点 $P$ 对摩托艇是危险的.

因为 $$(SP)^2=(NP)^2+\frac{a^2}{2}-a\cdot NP,$$

所以上面的不等式与下面的关于 $NP$ 的二次不等式等价：

$$16(NP)^2-22a\cdot NP+7a^2\leqslant 0.$$

当
$$\frac{a}{2}\leqslant NP\leqslant\frac{7}{8}a$$
时，这不等式成立，所以，航程中从全程的 $\frac{3}{4}$ 开始到全程的 $\frac{15}{16}$ 为止的一段是危险的，这一段占全程的 $\frac{3}{16}$.

**92**. 开始时摩托艇在点 $M$，警戒船在点 $S$. 摩托艇需要到达岸边的点 $W$（图 160）. 点 $M$、$S$、$W$ 在一条直线上，$MS=SW$. 根据题目条件，摩托艇必须沿着直角 $MNW$ 的两条直角边航行，其中直角 $MNW$ 内接于以 $MW$ 为直径的圆.

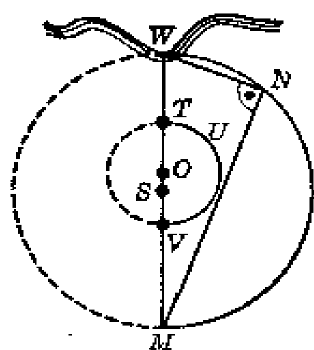


图 160

摩托艇的路径应当尽可能地短，所以路径的第一部分线段 $MN$ 与 $MW$ 方向所夹的角要尽可能地小. 此外，摩托艇必须有把握地避开警戒船. 所以它的路径不应该与阿波罗圆① $TUV$ 相交. 警戒船与摩托艇分别从点 $S$ 与 $M$ 出发，以自己最大的速度直线航行，相遇点的轨迹就是圆 $TUV$. 这个阿波罗圆的圆心在线段 $MW$ 上的位置，由下列关系式确定：

$$MT=3ST,$$
$$MV=3SV,$$
$$OT=OV.$$

---

① 这里所谓阿波罗圆是指：到两定点的距离的比等于定值的点的轨迹，可以证明，当这定比不等于 1 时，轨迹是一个圆. 本题中两定点是 $S$、$M$，定比为 $\frac{1}{3}$，轨迹是以 $TV$ 为直径的圆，其中 $T$、$V$ 在直线 $SM$ 上，$MT=3ST$，$MV=3SV$.
——译者

从这几个等式得出：

$$MO=\frac{9}{16}MW,$$

阿波罗圆的半径等于 $\frac{3}{16}MW$. 如果线段 $MN$ 与圆 $TUV$ 相切，那末摩托艇的路径全长等于 $\frac{2\sqrt{2}+1}{3}MW$①；如果 $MN$ 与圆没有公共点，那末路径全长大于$\frac{2\sqrt{2}+1}{3}MW$. 还要验证，如果线段 $MN$ 充分接近地从圆 $TUV$ 旁边经过，那末警戒船在线段 $NW$ 上不能追及摩托艇. 这个验证留给读者完成.

这样，满足题目条件的摩托艇的航线完全确定了.

**93**. 这个奇怪的数就是数 1，它可以用三种方法写出：

$$1,\ 100\%,\ 57°17'44''.8(1\text{弪}).$$

**94**. 用新的"厘米尺"测量，误差为 $\frac{1}{2}$ cm，在这一点上，它与普通的尺一样，没有特别的优越性. 测量某一线段 $AB$，终点 $B$ 一般在两条刻度线之间(图 161). 如果 $N$ 是两条刻度线之间所写的数，利用新的带尺，我们无疑地把这线段的长

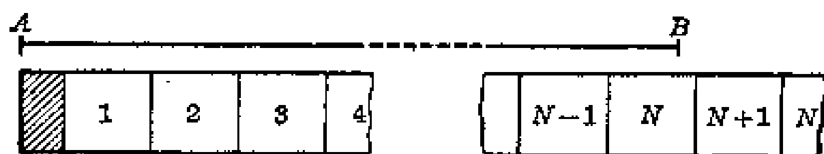



图 161

---

① 过 $O$ 作 $OL\perp MN$，垂足为 $L$(在图上未画出)，那末从相似三角形 $MOL$ 与 $MWN$ 可得比例式 $\frac{MO}{MW}=\frac{OL}{WN}=\frac{ML}{MN}$，即

$$\frac{\frac{9}{16}MW}{MW}=\frac{\frac{3}{16}MW}{WN}=\frac{\frac{6}{16}\sqrt{2}MW}{MN}=\frac{\frac{3+6\sqrt{2}}{16}MW}{WN+MN},$$

所以，

$$WN+NW=\frac{3+6\sqrt{2}}{16}MW\cdot\frac{16}{9}=\frac{2\sqrt{2}+1}{3}MW.$$ ——译者

写作 $N$ cm. 但是使用普通的带尺时，我们还得确定，点 $B$ 是靠近左边的刻度线还是靠近右边的刻度线. 在特殊的情况，当终点 $B$ 跟数 $N$ 与 $N+1$ 之间的刻度线重合时，使用新的带尺，我们就可以写出：

$$AB=\left(N+\frac{1}{2}\right)\text{cm}.$$

**95.** 每个大学生借钱给人家，就把钱数用正数记下，而向人家借钱，则用负数记. 到一年末了，各人计算所记下的数的和，得到一个正的或负的余额，所有余额的和必定是零.

根据萨拉杰克的记帐法，完全可以还清欠款，而且最多只须付六次款. 事实上，开始由“最小的”欠债人把全部欠款交给“最大的”债权人，这样，欠债人与债权人的总数最多是 6. 根据这样的原则付五次款后，负债人与债权人总数最多是 2. 因此第六次付款后，全部欠款都还清. 当然，可能在某一次付款以后，一个债权人变为欠债人(因为“最小的”欠债人的欠款可能比“最大的”债权人的债权大，这时债权人多拿了“最小的”欠债人的付款，暂时成为欠债人. ——译者)，但是这个事实并不改变债权人与欠债人的总数.

**96.** 字母 $p$ 代表天平的右盘，字母 $l$ 代表左盘，称了三次以后，我们得到下面的钱币配置表：

| | $K$ | $E$ | $Y$ | $P$ | $T$ | $O$ | $N$ | $I$ | $M$ | $D$ | $W$ | $\varDelta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第一次称 | $p$ | $p$ | $l$ | | $l$ | $l$ | | $p$ | $l$ | | | $p$ |
| 第二次称 | | | | | $p$ | $l$ | $p$ | $p$ | $l$ | $l$ | $p$ | $l$ |
| 第三次称 | $l$ | | $l$ | $p$ | | $p$ | $p$ | $p$ | | | $l$ | $l$ |

现在假定只有一个钱币是假的. 我们用符号“○”表示天平的两盘平衡，符号“+”表示钱币所在的盘较重，“−”表示钱

币所在的盘较轻. 如果三次称的结果都是右盘较重，我们得到下面的表：

| | K | R | Y | P | T | O | N | I | M | D | W | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第一次称 | + | + | − | | − | − | | + | − | | | + |
| 第二次称 | | | | | + | − | + | + | − | − | + | − |
| 第三次称 | − | | − | + | | + | + | + | | | − | − |

从这张表立即可以看出，钱币 $I$ 是假的，它比其他的钱币重.

如果三次称的结果都是左盘较重，我们得到：

| | K | R | Y | P | T | O | N | I | M | D | W | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第一次称 | − | − | + | | + | + | | − | + | | | − |
| 第二次称 | | | | | − | + | − | − | + | + | − | + |
| 第三次称 | + | | + | − | | − | − | − | | | + | + |

同样地，从这张表可以断定假的钱币是 $I$，它比其他钱币轻.

如果第一次称两盘平衡，第二次称右盘较重，第三次称左盘较重，我们有：

| | K | R | Y | P | T | O | N | I | M | D | W | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第一次称 | ○ | ○ | ○ | | ○ | ○ | | ○ | ○ | | | ○ |
| 第二次称 | | | | | + | − | + | + | − | − | + | − |
| 第三次称 | + | | + | − | | − | − | − | | | + | + |

从这张表直接可以看出：假钱币是 $W$，它比其他的钱币重.

所以，如果假定只有一个钱币是假的，就可以从表的符号

配置断定，哪个钱币是假的，它比其余的钱币轻还是重.

根据三次称得的不同结果，可以列出许多张不同的表. 我们注意到表中钱币 $I$ 三次都放在右盘称，因此表中钱币 $I$ 这一列的三个符号就组成由 ○, +, − 三元素形成的有重复的排列. 我们知道，三个元素组成的有重复的排列数是 $3^3=27$. 但是，不难验证，$I$ 列（$O$ 列，$A$ 列也一样）不可能有下面三个排列：$\begin{matrix}\bigcirc\\ \bigcirc\\ \bigcirc\end{matrix}$, $\begin{matrix}+\\ -\\ +\end{matrix}$, $\begin{matrix}-\\ +\\ -\end{matrix}$.

但是，如果假钱币最多只有一个，那末如果出现 $\begin{matrix}\bigcirc\\ \bigcirc\\ \bigcirc\end{matrix}$, 就可以得出结论，所有的钱币都是真的.

如果至少有一个钱币是假的，那末当出现上述三种情况之一，就可以断定至少有两个钱币是假的. 这时，假钱币可能就是 $YT$ 或者 $YW$ 或者 $TW$（如果只有两个假钱币），假钱币也可能是 $KTY$ 或者 $RPD$ 等等（如果只有三个假钱币）…. 骗局之所以被发现，是因为博士给假钱币作上的记号是 $T$, $Y$, $W$ 三个字母中的两个. 如果不是这样，骗局就不会被发现. 事实上，比方说，假定两个假钱币（比其余的重）是 $K$ 与 $P$，那末三次称得的结果用符号表示将有

$$MYTO<RAKI,\ MODA=WINT,$$
$$WYKA=PION,$$

而这时由于他的朋友骗他说假钱币只有一个，那末博士必定认为假钱币（较重的）是 $R$，这就猜错了.

还要回答最后一个问题，萨拉杰克的朋友能不能变动两个钱币的重量，使骗局不能被发现？

设这两个钱币的重量分别是 $m_1$ 与 $m_2$，其余钱币的重量都是 $m$.

如果

$$m_1 \neq m, \ m_2 \neq m, \text{ 而且 } m_1 \leqslant m_2$$

(可以这样假设)，那末可能发生下列三种情况的一种：

(1) $m < m_1 \leqslant m_2$, (2) $m_1 < m < m_2$, (3) $m_1 \leqslant m_2 < m$.

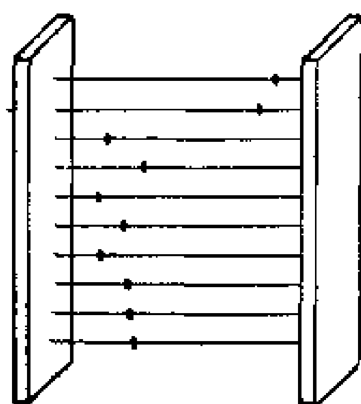
现在只要把重量为 $m_1$ 与 $m_2$ 的钱币分别标上 $W$ 与 $Y$，或者 $D$ 与 $Y$，或者 $T$ 与 $Y$，使称得的结果分别是 $-+-$ 或者 $+-+$ 就不能骗过博士了. 所以，萨拉杰克的朋友不可能改变钱币的重量，使得他能保证骗过博士，虽然骗局的暴露要看博士是否把这两个钱币用这样的字母标上，使博士不能肯定是否骗局.

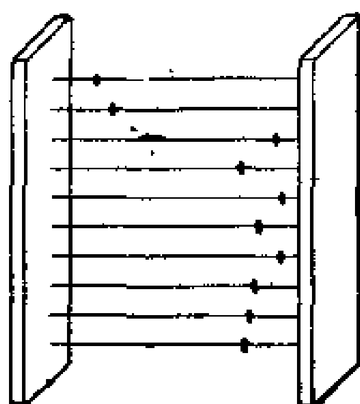
**97**. 最底下的一层如图 162 所示. 把这层的第一列移到最右边得到它上面的一层，其余每层都是这样得到. 可以看出，题目的条件是满足的.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 白<br>A1 | 黄<br>B2 | 绿<br>C3 | 红<br>D4 | 蓝<br>E5 |
| 红<br>E2 | 蓝<br>A3 | 白<br>B4 | 黄<br>C5 | 绿<br>D1 |
| 黄<br>D3 | 绿<br>E4 | 红<br>A5 | 蓝<br>B1 | 白<br>C2 |
| 蓝<br>C4 | 白<br>D5 | 黄<br>E1 | 绿<br>A2 | 红<br>B3 |
| 绿<br>B5 | 红<br>C1 | 蓝<br>D2 | 白<br>E3 | 黄<br>A4 |

图 162

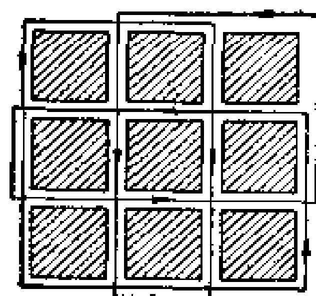
**98**. 萨拉杰克博士说的是对的. 事实上，如果假设与此相反，也就是在某一确定时刻，右半部只有两个或更少的算盘珠(图 163)，那末经过一定时间后，总可使每根铁丝上的珠，运动到与这一时刻的位置对称的位置(图 164). 这时算盘的


图 163


图 164

左半部只有两个(或更少)珠,右半部有八个(或更多)珠,这与题目的条件矛盾.

**99**. 萨拉杰克博士的解答是恰当的，不管他住在什么地方都一样. 事实上,图 165 表明,汽车可以从任意选定的一点出发,驶遍城市所有的街道回到出发点. 汽车行驶的全程，比城市街道的全长多 16.7%.


图 165

**100**. 沙龙,维特律,苏蒙,新岗坦与里姆斯五个城市形成封闭五边形，其中一条边(沙龙——新岗坦)的长是其余四条边的长的和，因为 $236=86+40+30+80$. 这只有当五边形的顶点在一条直线上才有可能. 五个城市在一条直线上的排列顺序如下:新岗坦,里姆斯,沙龙,维特律与苏蒙. 所以，里姆斯与苏蒙之间的距离等于 $40+30+80=150$ 公里.